DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA 8, 2007

Antoni Leon Dawidowicz (Kraków)
Krystyna Twardowska (Warszawa)

Twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga–Zakai dla operatora Lasoty

Professor Andrzej Lasota in Memoriam

Streszczenie. W pracy pokazano, że stochastyczne równanie ewolucyjne z operatorem Lasoty jako infinitezymalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy odwzorowań i z operatorem Hammersteina występującym przy zaburzeniu będącym procesem Wienera, spełnia twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga–Zakai. Idea wprowadzenia operatora Lasoty związana jest z matematycznym modelem powstawania i różnicowania się komórek.
Słowa kluczowe: aproksymacja Wonga–Zakai, równanie Lasoty.

1. Wstęp. Pokażemy, że stochastyczne równanie ewolucyjne z infinitezymalnym generatorem będącym operatorem Lasoty i z operatorem Hammersteina występującym przy zaburzeniu będącym procesem Wienera, spełnia twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga–Zakai. Operator Lasoty został wprowadzony w pracy [5], a początkowe badania na ten temat znajdują się we wspólnej pracy A. Lasoty i J. Yorka [6]. W pracy [5] podany jest nowy warunek wystarczający istnienia ciągłych, niezmienniczych i ergodycznych miar oraz turbulentnych trajektorii dla semi-dynamicznych układów w przestrzeniach topologicznych. Ruch opisany przez takie układy jest turbulentny, gdy ich trajektorie są nieregularne i skomplikowane. Jedno z podejść do opisu takich układów znajduje się w pracy Prodiego [9], gdzie stacjonarne turbulencje pojawiają się wtedy, gdy dopuszcza się nietrywialną niezmienniczą ergodyczną miarę. Istnienie turbulentnych trajektorii implikuje twierdzenie Kryłowa–Bogolubowa o istnieniu miar niezmienniczych, i odwrotnie, z istnienia niezmienniczej ergodycznej miary wynika na podstawie indywidualnego ergodycznego twierdzenia Birkhoffa, że prawie wszystkie trajektorie są skomplikowane i nieregularne. Następnie, w pracy [5] A. Lasota stosuje powyższy rezultat do liniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu. Równanie to zależy od pewnego parametru λ, grającego rolę liczby Reynoldsa. Dla λ wystarczająco małych ($\lambda < 1$) rozwiązanie zbiega do laminarnego rozwiązania. Dla dużych wartości λ ($\lambda \geq 2$) równanie dopuszcza nieskończenie wiele turbulentnych rozwiązań. Jest to dość zaskakujące, gdyż zazwyczaj turbulencje pojawiają się dla nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych wyższego rzędu.

Zdefiniowanie operatora Lasoty było podyktowane biologiczną motywacją opisu powstawania i różnicowania się komórek. Ma ono duże zastosowanie w biologii i medycynie. Badania te zostały zapoczątkowane przez A. Lasotę i M. Ważewską-Czyżewską w pracy [7].

Operator ten był później badany na przykład przez A. L. Dawidowicza i Z. Brzeźniaka [1], A. L. Dawidowicza [2], A. L. Dawidowicza i A. Poskrobko [4], K. Łoskota [8] oraz R. Rudnickiego [10]. Operator Lasoty uogólnia operator von Foerstera, badany na przykład przez A. L. Dawidowicza i N. Haribasha w pracy [3], jednak w przypadku operatora von Foerstera nie różnicuje się komórek pod względem wieku.

Sprawdzimy, że operator Lasoty spełnia twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga i Zakai, którzy po raz pierwszy udowodnili to twierdzenie dla przypadku jednowymiarowego w pracy [14]. Uogólnienia tego twierdzenia dla stochastycznych równań ewolucyjnych znajdują się na przykład w pracach K. Twardowskiej [11] i [12]. Twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga–Zakai ma ogromne znaczenie, stanowi bowiem podstawę dowodów twierdzeń o nośniku miary związanej z rozwiązaniem danego równania stochastycznego, co na przykład pokazano w pracy K. Twardowskiej [13], a także do twierdzeń o niezmienniczości rozwiązań równania stochastycznego oraz w metodach numerycznych rozwiązywania stochastycznych równań różniczkowych, gdyż pojawiający się przy aproksymacji tak zwany człon korekcyjny, poprawia zbieżność metod numerycznych.

2. Turbulencje i miary niezmiennicze. Najciekawsze wyniki w odniesieniu do równania z operatorem Lasoty dotyczą jego chaotycznych zachowań. Dla przykładu przytoczymy wyniki pracy [5] dotyczące tego właśnie zagadnienia.

Niech X będzie topologiczną przestrzenią Hausdorffa oraz $S_t : X \to X$, $t \geq 0$, będzie półgrupą takich przekształceń, że

$$S_0 = I \text{ (identyczność)},$$
$$S_{t+s} = S_t \circ S_s, \text{ dla } s \geq 0,\ t \geq 0.$$

Półgrupę $\{S_t\}$ nazywamy układem semi-dynamicznym, gdy odwzorowanie

$$\mathbb{R}^+ \times X \ni (t,x) \mapsto S_t x \in X$$

jest ciągłe względem (t,x).

Wprowadzimy kolejno następujące oznaczenia dla trajektorii startującej z x i dla zbioru granicznego:

$$O(x) = \{S_t x : t \geq 0\},$$
$$L(x) = \bigcap\nolimits_{t\geq 0} \overline{O(S_t x)}.$$

Punkt $x \in X$ nazywany jest punktem okresowym, gdy istnieje takie $t > 0$, że $S_t x = x$, czyli każdy punkt stały przekształcenia S_t jest okresowy.

Definicja 1. Mówimy, że trajektoria $O(x)$ jest silnie turbulentna, gdy
(i) $L(x)$ jest zbiorem zwartym i niepustym,
(ii) $L(x)$ nie zawiera punktów okresowych.

W pracy [5] A. Lasota udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 [5]. *Załóżmy, że $\{S_t\}$ jest układem semi-dynamicznym na przestrzeni Hausdorffa X i istnieją: taka liczba $r > 0$ oraz dwa niepuste zwarte rozłączne zbiory $A, B \subset X$, że*

$$A \cup B \subset S_r(A) \cap S_r(B).$$

Wówczas istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że trajektoria $O(x_0)$ jest silnie turbulentna.

Następnie, w pracy [5] została udowodniona wersja Twierdzenia 2, którą stosuje się także do układów dynamicznych. Przykładem może być układ opisany za pomocą operatora Lasoty, który przedstawimy w paragrafie 3.

Tak więc mamy

Twierdzenie 3 [5]. *Załóżmy, że $\{S_t\}$ i $\{T_t\}$ są układami semi-dynamicznymi odpowiednio na przestrzeniach Hausdorffa X i Y. Niech $F : X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy, że dla każdego $t \geq 0$ następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S_t} & X \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ Y & \xrightarrow[T_t]{} & Y \end{array}$$

Przypuśćmy także, że istnieją: taka liczba $r > 0$ oraz dwa niepuste zwarte rozłączne zbiory $A, B \subset X$, że

$$A \cup B \subset T_r(A) \cap T_r(B).$$

Wówczas istnieje taki punkt $x_0 \in X$, że trajektoria $O(x_0) = \{S_t x_0 : t \geq 0\}$ jest silnie turbulentna.

Definicja 4. Mówimy, że miara μ jest niezmiennicza względem $\{S_t\}$, jeżeli $\mu(E) = \mu(S_t^{-1}(E))$ dla każdego t oraz dla każdego podzbioru borelowskiego E zbioru X.

DEFINICJA 5. Mówimy, że miara μ jest ergodyczna, gdy dla każdego zbioru borelowskiego E, z warunku

$$E = S_t^{-1}(E) \qquad \text{dla } t \geq 0$$

wynika, że

$$\mu(E)(1 - \mu(E)) = 0.$$

TWIERDZENIE 6 [5]. *Jeśli dla* $\{S_t\}$, $t \geq 0$, *istnieje trajektoria silnie turbulentna, to istnieje dla* $\{S_t\}$, $t \geq 0$, *nietrywialna ergodyczna miara niezmiennicza.*

3. Operator Lasoty. Rozważmy następujące liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda u, \qquad t \leq 0, \qquad 0 \leq x < \infty \tag{1}$$

z warunkami początkowymi i brzegowymi

$$\begin{aligned} &u(t,0) = 0, \\ &u(0,x) = v(x), \qquad 0 \leq x < \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest stałą.

Przez rozwiązanie rozumiemy funkcję $u(t,x)$ – ciągłą i różniczkowalną, która spełnia to równanie dla wszystkich $t \geq 0$ oraz $0 \leq x < \infty$.

Oznaczmy przez V unormowaną przestrzeń funkcji ciągłych i różniczkowalnych $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ takich, że $v(0) = 0$.

Wiadomo, że dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie powyższego równania i dane jest ono wzorem:

$$u(t,x) = e^{\lambda t} v(xe^{-t}), \;\; t \geq 0, \; x \in [0,1]. \tag{3}$$

Ewolucja rozwiązań problemu (1)–(2) w czasie wyznacza półgrupę, którą oznaczamy przez $\{S_t\}_{t\geq 0}$, czyli

$$(S_t v)(x) = e^{\lambda t} v(xe^{-t}), \;\; t \geq 0, \; x \in [0,1]. \tag{4}$$

Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 7 [5]. *Jeśli* $\lambda < 1$, *to dla każdego* $v \in V$ *mamy*

$$\lim_{t\to\infty} \|S_t v\| = 0$$

oraz jedyna miara niezmiennicza dla $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *jest skoncentrowana na punkcie stałym* $v \equiv 0$. *Jeśli* $\lambda \geq 2$, *to układ semi-dynamiczny* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *posiada silnie turbulentne trajektorie i w konsekwencji dla* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ *istnieje nietrywialna ergodyczna miara niezmiennicza.*

Operator infinitezymalny dla półgrupy $\{S_t\}$, $t \geq 0$, definiujemy jako

$$Au = \lambda u - x\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

określony na V.

Definicja 8. Mówimy, że silnie ciągła półgrupa $\{S_t\}_{t\geq 0}$ jest typu kontrakcji, jeżeli istnieje taka stała $M \in \mathbb{R}^+$, że dla każdego $t \geq 0$:

$$\|S_t\| \leq e^{Mt}.$$

Stwierdzenie 1. *Półgrupa* $\{S_t\}$, $t \geq 0$, *jest silnie ciągłą półgrupą typu kontrakcji na przestrzeni* $L^2([0,1], R)$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\|S_t v\|^2 &= \int_0^1 \mid S_t v(x) \mid^2 dx = \int_0^1 e^{2\lambda t} \mid v(xe^{-t}) \mid^2 dx \\
&= \left\{ \begin{matrix} z = xe^{-t}, \qquad x = ze^t \\ dx = e^t dz \end{matrix} \right\} = \int_0^{e^{-t}} e^{2\lambda t} \mid v(z) \mid^2 e^t dz \\
&\leq e^{(2\lambda+1)t}\|v\|^2.
\end{aligned}$$

Tak więc

$$\|S_t\| \leq e^{(\lambda+\frac{1}{2})t},$$

czyli $\{S_t\}_{t\geq 0}$ jest półgrupą typu kontrakcji dla $M = \lambda + \frac{1}{2}$, co kończy dowód.

4. Stochastyczne równania ewolucyjne. Rozważmy następujące stochastyczne równanie ewolucyjne w przestrzeni Hilberta H :

$$\begin{aligned} du(t) &= Au(t)dt + B(u(t))dw(t), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Równanie to dopuszcza zaburzenia modelu przez zewnętrzne losowe zdarzenia, które nie są ujęte w części deterministycznej modelu. Równanie Lasoty opisuje bowiem w przybliżeniu dynamikę populacji. Błąd przybliżenia ujmujemy w człon stochastyczny dany za pomocą pewnego operatora działającego na proces Wienera.

Niech H i H_1 będą ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta z normami $\|\cdot\|_H$ i $\|\cdot\|_{H_1}$ oraz iloczynami skalarnymi $< \cdot,\cdot >_H$ i $< \cdot,\cdot >_{H_1}$, odpowiednio. Niech $L_2(H, H_1)$ oznacza przestrzeń Hilberta–Schmidta operatorów z normą $\|\cdot\|_{HS}$.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ będzie przestrzenią prawdopodobieństwa z filtracją, która jest rosnącą i prawostronnie ciągłą rodziną zupełnych pod-σ-algebr algebry $\mathcal{F}$. Rozważmy proces Wienera $w(t)$ o wartościach w H, z operatorem kowariancji $Q \in L(H,H) = L(H)$. Można go więc przedstawić w postaci

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(t) e_i$$

prawie wszędzie względem $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, gdzie $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną wektorów własnych operatora Q, odpowiadających wartościom własnym $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, gdzie $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i < \infty$, oraz

$$E[\Delta w_i \Delta w_j] = (t-s)\lambda_i \delta_{ij}$$

dla $\Delta w_i = w_i(t) - w_j(t)$, $s < t$ (δ_{ij} jest deltą Kroneckera).

Wprowadźmy n-tą aproksymację procesu Wienera $(w(t))_{t\in[0,T]}$:

$$w^n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^n(t) e_j, \tag{7}$$

gdzie $0 = t_0^n < ... < t_n^n = T$ oraz dla $t_{i-1}^n < t \le t_i^n$ definiujemy

$$w_j^n(t) = \frac{t - t_{i-1}^n}{t_i^n - t_{i-1}^n} w_j^n(t_i^n) + \frac{t_i^n - t}{t_i^n - t_{i-1}^n} w_j(t_{i-1}^n).$$

Wprowadźmy następujące założenia:

(A1) $(u(t))_{t\in[0,T]}$ jest procesem stochastycznym o wartościach w H_1, $A : D(A) \subset H_1 \to H_1$ jest infinitezymalnym generatorem półgrupy $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$, $B : H_1 \to L(H,H_1)$ jest nieliniowym operatorem, $\{S(t)\}_{t\in[0,T]}$ jest półgrupą typu kontrakcji;

(A2) $u_0 \in D(A)$ jest zmienną losową $\mathcal{F}_0$-mierzalną, całkowalną z kwadratem, o wartościach w H_1, stanowiącą warunek początkowy;

(A3) istnieje stała $K > 0$ oraz dodatnio określony symetryczny operator nuklearny R, przemienny z S, taki że $P(R^{-1}z_0 \in H_1) = 1$ oraz zachodzą warunki

(*i*) $\|R^{-1}B(h_1)Q^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2 + \|R^{-1}tr(QDB(h_1)B(h_1))\|_{H_1}^2 \le K(1 + \|h_1\|_{H_1}^2)$,

(*ii*) $tr((B(h_1) - B(\widetilde{h}_1))Q(B(h_1) - B(\widetilde{h}_1)^*)) \le K\|h_1 - \widetilde{h}_1\|_{H_1}^2$

dla $h_1, \widetilde{h}_1 \in H_1$, gdzie „$*$” oznacza operator sprzężony;

(A4) operator $B \in C_b^1$, to znaczy jest klasy C^1 z ograniczoną pochodną, która jest globalnie Lipschitzowska;

(A5) operator $DB(h_1)A$: $D(A) \subset H_1 \to L(H,H_1)$ może być jednoznacznie przedłużony do ograniczonego operatora z H_1 do $L(H,H_1)$, to znaczy że istnieje dodatnia stała k, taka że dla $h_1 \in H_1$ mamy

$$\|DB(h_1)Ah_1\|_{L(H,H_1)} \le k\|h_1\|_{H_1}.$$

Oprócz równania (6) rozważmy równanie

$$\text{(8)}\qquad d\widehat{u}(t) = A\widehat{u}(t)dt + B(\widehat{u}(t))dw(t) + \frac{1}{2}\widetilde{tr}(QDB(\widehat{u}(t))B(\widehat{u}(t)))dt,$$
$$\widehat{u}(0) = u_0,$$

gdzie $\frac{1}{2}\widetilde{tr}(QDB(\widehat{u}(t))B(\widehat{u}(t)))$ jest tak zwanym członem korekcyjnym wynikającym z twierdzenia aproksymacyjnego typu Wonga–Zakai. Jest on zdefiniowany w pracach K. Twardowskiej [11], [12].

Definicja 10. Mówimy, że proces $(u(t))_{t\in[0,T]}$ jest osłabionym rozwiązaniem równania (6), jeżeli:
(i) $(u(t))_{t\in[0,T]}$ jest procesem progresywnie mierzalnym;
(ii) $B(u(\cdot)) \in \Lambda_T(w, H, H_1)$, gdzie

$$\Lambda_T(w,H,H_1) = \Big\{\Psi : [0,T]\times\Omega \to L(H,H_1),$$
$$\Psi \text{ jest procesem progresywnie mierzalnym},$$
$$E\left[\int_0^T \|\Psi Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{HS} ds\right] = \|\Psi\|^2_{\Lambda_t} = \sum_{i=0}^{\infty} E\left[\int_0^T \|\Psi(s,\omega)e_i\|^2_{H_1} ds\right] < \infty\Big\};$$

(iii) dla każdego $t\in[0,T]$ istnieje Ω_t spełniające warunek $P(\Omega_t)=1$, takie że równanie (6) jest spełnione dla każdego $\omega\in\Omega_t$.

Rozważmy ciąg równań aproksymacyjnych

$$\text{(9)}\qquad du^n(t) = Au^n(t)dt + B(u^n(t))dw^n(t),$$
$$u^n(0) = u_0,$$

gdzie $(w^n(t))_{t\in[0,T]}$ jest ciągiem aproksymacyjnym dla procesu Wienera, danym równaniem (7).

Wiadomo z teorii stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych, że problemy (6), (8) i (9) mają jednoznaczne rozwiązania.

Mamy następujące

Twierdzenie 11 [12]. *Załóżmy, że $(w^n(t))_{t\in[0,T]}$ jest n-tą aproksymacją procesu Wienera $(w(t))_{t\in[0,T]}$, daną wzorem (7). Niech $(u^n(t))_{t\in[0,T]}$ będą rozwiązaniami ciągu równań aproksymacyjnych (9) i $\widehat{u}(t)$ niech będzie rozwiązaniem równania (8). Załóżmy, że spełnione są założenia (A1)–(A5) oraz $E\|R^{-1}u_0\|^2_{H_1} < \infty$. Wówczas, dla każdego T, $0 < T < \infty$ oraz dla danego $\varepsilon > 0$ mamy*

$$\text{(10)}\qquad \lim_{n\to\infty} P(\sup_{0\le t\le T} \|u^n(t,\omega) - \widehat{u}(t,\omega)\|_{H_1} \ge \varepsilon) = 0.$$

5. Przykład. Weźmy teraz $H = H_1 = L^2([0,1])$ z bazą ortonormalną $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$. Niech A będzie infinitezymalnym generatorem półgrupy dla operatora Lasoty. Zdefiniujmy operator całkowy Hammersteina na H_1 jako operator $B : H_1 \to L(H, H_1)$ postaci:

$$B(h)(e_i)(s) = \int_0^1 K_i(s,t) f(t, h(t)) dt,$$

gdzie $K_i(s,t) = K_{i1}(s) K_{i2}(t)$ oraz $K_{i1}(s) \in C^4([0,1])$, $K_{i2}(t) \in C([0,1])$, $f \in C^1([0,1]) \times \mathbb{R})$. Ponadto mamy $\mid f(t,x) \mid \leq a(t) + b \mid x \mid$. Niech $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ będzie operatorem Laplace'a z jednorodnymi warunkami brzegowymi typu Dirichleta lub Neumanna. Zdefiniujmy operator

$$R = (I - \Delta)^{-1},$$

Oczywiście R jest operatorem dodatnio określonym, symetrycznym i nuklearnym.

Pokażemy, że wówczas są spełnione założenia Twierdzenia 11, tak więc zachodzi twierdzenie aproksymacyjne typu Wonga–Zakai dla problemów z infinitezymalnym generatorem określonym przez operator Lasoty, przy odpowiednim doborze operatora B.

Zauważmy najpierw, że

$$DB_{x_0}(h)(e_i)(s) = \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, x_0(t)) h(t) dt.$$

Z przyjętych definicji i własności operatorów wynika [11], że są spełnione założenia (A1)–(A4).

Sprawdzimy teraz założenie (A5). Mamy najpierw z definicji operatora A:

$$\begin{aligned} (11) \quad & DB(h_1) A h_1(e_i)(s) \\ &= \lambda \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) h_1(t) dt - \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h'_1(t) dt \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Oszacujmy I_2. Całkując przez części dostajemy:

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_0^1 [K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t] h'_1(t) dt = K_i(s,1) f'_x(1, h_1(1)) 1 h_1(1) \\ & - K_i(s,0) f'_x(0, h_1(0)) 0 h_1(0) - \int_0^1 [K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t]'_t h_1(t) dt \\ = & K_i(s,1) f'_x(1, h_1(1)) h_1(1) - \int_0^1 K'_{it}(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h_1(t) dt \end{aligned}$$

$$- \int_0^1 K_i(s,t) f''_{xt}(t, h_1(t)) t h_1(t) dt - \int_0^1 K_i(s,t) f''_{xx}(t, h_1(t)) h'_1(t) t h_1(t) dt$$
$$- \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h_1(t) dt.$$

Możemy napisać
$$I_2 = I_{21} - I_{22} - I_{23} - I_{24} - I_{25}.$$
Przy stosownym wyborze funkcji $f(t,x)$, na przykład tak, aby $f'_x(t, h_1(t)) = \alpha f^{\prime\prime}_{xx}(t, h_1(t)) h'_1(t)$, $\alpha \geq 0$, dodają się do siebie wyrażenia I_2 oraz I_{24}, tak więc znikają pochodne $h'_1(t)$ przy oszacowaniach. Mamy więc

$$DB(h_1)Ah_1(e_i)(s) = \lambda \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) h_1(t) dt$$
$$- (1-\alpha) \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h'_1(t) dt = \lambda \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) h_1(t) dt$$
$$- \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h'_1(t) dt - K_i(s,1) f'_x(1, h_1(1)) h_1(1)$$
$$+ \int_0^1 K'_{it}(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h_1(t) dt + \int_0^1 K_i(s,t) f''_{xt}(t, h_1(t)) t h_1(t) dt$$
$$+ \int_0^1 K_i(s,t) f'_x(t, h_1(t)) t h_1(t) dt,$$

a stąd otrzymujemy oszacowanie $\|DB(h_1)Ah_1\|_{L(H,H_1)} \leq k \|h_1\|_{H_1}$.

Literatura

[1] Z. Brzeźniak and A. L. Dawidowicz, *On periodic solutions of the Lasota equation*, to appear in Semigroup Forum.

[2] A. L. Dawidowicz, *On the existence of an invariant measure for the dynamical system generated by partial differential equation*, Ann. Pol. Math., **XLI** (1983), 129–137.

[3] A. L. Dawidowicz and N. Haribash, *On the periodic solutions of von Foerster type equation*, Univ. Jagellonicae Acta Mathematica, **37** (1999), 321–324.

[4] A. L. Dawidowicz and A. Poskrobko, *On asymptotic behaviour of the dynamical systems generated by von Foerster–Lasota equations*, Control and Cybernetics, **35**, no. 4 (2006), 803–813.

[5] A. Lasota, *Invariant measures and a linear model of turbulence*, Rendiconti del Seminario Matematica dell'Universita di Padova, **61** (1979), 39–48.

[6] A. Lasota and J. Yorke, *On the existence of invariant measures for transformations with strictly turbulent trajectories*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom.

Phys., **25** (1977), 233–238.
[7] A. Lasota, M. Ważewska-Czyżewska, *Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych*, Matematyka Stosowana, **6** (1976), 23–40.
[8] K. Łoskot, *Turbulent solutions of first order partial differential equation*, J. Differential Equations, **58**, no. 1 (1985), 1–14.
[9] G. Prodi, *Teoremi ergodici per le equazioni della idrodinamica*, C.I.M.E., Roma, 1960.
[10] R. Rudnicki, *Invariant measures for the flow of a first order partial differential equation*, Ergodic Th. Dyn. Systems **5**, no. 3 (1985), 437–443.
[11] K. Twardowska, *An approximation theorem of Wong–Zakai type for nonlinear stochastic partial differential equations*, Stochastic Anal. Appl., **13**, no. 5 (1995), 601–626.
[12] K. Twardowska, *Approximation theorems of Wong–Zakai type for stochastic differential equations in infinite dimensions*, Dissertationes Math., Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny, Vol. 325, Warszawa, 1993, 1–53.
[13] K. Twardowska, *On support theorems for stochastic nonlinear partial differential equations*, in: Stochastic Differential and Difference Equations, eds. I. Csiszár and Gy. Michaletzky, Birkhäuser, Boston, 1997, 309–317.
[14] E. Wong and M. Zakai, *On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals*, Ann. Math. Statist., **36** (1965), 1560–1564.

Antoni L. Dawidowicz
Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków
E-mail: Antoni.Leon.Dawidowicz@im.uj.edu.pl

Krystyna Twardowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
Plac Politechniki 1, 00-661 Warszawa
E-mail: tward@mini.pw.edu.pl

On the approximation theorem of Wong-Zakai type for A. Lasota operator

Abstract. We consider in the paper a stochastic evolution equation with Professor A. Lasota operator as the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup of transformations and with Hammerstein operator connected with a noise being the Wiener process. We show that such an evolution equation satisfies the Wong–Zakai type approximation theorem. The idea of the definition of A. Lasota operator has the origin in the mathematical model of the creation and differentiation of cells in biology and medicine.
Key words: Wong–Zakai approximation, Lasota equation.

(*wpłynęło 31 maja 2007 r.*)