MATEMATYKA STOSOWANA 8, 2007

Antoni Leon Dawidowicz (Kraków)

Metoda Aveza i jej uogólnienia

Pamięci mojego mistrza Prof. dr. Andrzeja Lasoty

Streszczenie. W niniejszej pracy przedstawione są twierdzenia dotyczące istnienia miar niezmienniczych ze szczególnym uwzględnieniem metody Aveza, której zastosowania były przedmiotem prac prof. Lasoty.
Słowa kluczowe: miary niezmiennicze, własności ergodyczne.

1. Wstęp. Profesor Andrzej Lasota, którego pamięci dedykowany jest niniejszy artykuł, zajmował się w swoich pracach zastosowaniami matematyki w biologii, w szczególności w pracach [16, 17] opisał za pomocą równań różniczkowych działanie układu krwiotwórczego. W trakcie badań nad białaczką okazało się, że interesujące jest przyjrzenie się chaotycznym zachowaniom rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych. Już wcześniej zauważono, że chaotyczne zachowanie rozwiązania ma związek z istnieniem miary niezmienniczej.

2. Miary niezmiennicze. Przypomnijmy następującą definicję.

Definicja 1. Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną i niech

$$T : X \to X$$

będzie przekształceniem mierzalnym. Miarę μ określoną na σ-algebrze Σ nazywamy niezmienniczą względem przekształcenia T, jeżeli dla dowolnego $E \in \Sigma$

$$\mu\left(T^{-1}(E)\right) = \mu(E).$$

W praktyce rozważa się dwie sytuacje:

- na przestrzeni X określona jest naturalna miara i wtedy szukamy miary absolutnie ciągłej względem niej;

- przestrzeń X jest przestrzenią topologiczną, a Σ jest σ-algebrą zbiorów borelowskich, i wtedy szukamy miary dodatniej na zbiorach otwartych.

Oczywiście, żeby miara niezmiennicza była interesująca, rozsądnie jest przyjąć o niej pewne założenia. Punktem wyjścia do tych założeń jest hipoteza ergodyczna Boltzmanna (*gr.* $\check{\varepsilon}\rho\gamma o\nu$ – *energia*, $\grave{o}\delta\acute{o}\varsigma$ – *droga*). Orzeka ona, iż w układzie fizycznym średni czas przebywania cząstki w danym obszarze jest proporcjonalny do jego naturalnej miary prawdopodobieństwa. Formalizując, rozważmy układ dynamiczny $\{T_t\}_{t\in\mathbb{G}}$, gdzie $\mathbb{G}=\mathbb{N}$ lub $\mathbb{G}=\mathbb{R}_+$, na przestrzeni z miarą (X,Σ,m), taki że $m\left(T_t^{-1}(E)\right)=m(E)$ dla dowolnego $E\in\Sigma$.

Definicja 2. Układ $\{T_t\}$ nazywamy ergodycznym, jeżeli dla prawie wszystkich x i dla dowolnego $E\in\Sigma$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{card}\{k\le n : T_k x\in E\}=m(E),$$

gdy $\mathbb{G}=\mathbb{N}$ lub

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\{s\in(0,T) : T_s x\in E\}\right|=m(E),$$

gdy $\mathbb{G}=\mathbb{R}_+$, przy czym $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A.

Z pojęciem ergodyczności wiąże się pochodzące jeszcze z lat 30-tych ubiegłego stulecia twierdzenie Birkhoffa.

Twierdzenie 3 (Birkhoffa). *Jeżeli (X,Σ,μ) jest przestrzenią z miarą, $T: X\to X$ spełnia warunek $\mu\left(T^{-1}(E)\right)=\mu(E)$ dla dowolnych $E\in\Sigma$ oraz $f\in L^1(X)$, to istnieje taka funkcja $f^*\in L^1(X)$, że*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right)=f^*(x) \tag{1}$$

prawie wszędzie oraz $f^*(Tx)=f^*(x)$ prawie wszędzie.

Naturalna jest w związku z tym definicja.

Definicja 4. Miarę μ niezmienniczą względem transformacji $T: X\to X$ nazywamy ergodyczną, jeżeli dowolny zbiór $E\in\Sigma$ spełniający warunek

$$\mu\left(T^{-1}(E)\div E\right)=0$$

jest miary zero lub pełnej miary (tzn. jego dopełnienie jest miary zero).

Zauważmy, że przy założeniu, że miara μ jest skończona i za f wstawimy funkcję charakterystyczną pewnego zbioru A, to wzór (1) przyjmie postać

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{card}\{i=0,\dots,n-1 : T^i(x)\in A\}=\frac{\mu(A)}{\mu(X)}$$

prawie wszędzie, co odpowiada ergodyczności w rozumieniu Boltzmanna. W związku z tym, szukanie miary niezmienniczej i ergodycznej wiąże się z problemem chaosu. Najbardziej znane twierdzenie o istnieniu miary niezmienniczej pochodzi od Kryłowa i Bogolubowa [11]. Mówi ono, że dla każdego ciągłego przekształcenia zbioru zwartego w siebie istnieje miara niezmiennicza. W przypadku, gdy na zbiorze X określona jest naturalna miara (np. Lebesgue'a), szukamy miar niezmienniczych absolutnie ciągłych. W tym celu zakładamy, że transformacja $T : X \to X$ jest nieosobliwa, tzn. że przeciwobraz zbioru miary zero jest miary zero. Wtedy gęstością miary niezmienniczej będzie punkt stały następującego operatora $P : L^1 \to L^1$, zwanego operatorem Frobeniusa-Perrona. Niech T będzie transformacją nieosobliwą X w X i niech $f \in L^1(X)$. Określimy miarę znakozmienną φ na X wzorem

$$\varphi(E) = \int\limits_{T^{-1}(E)} f(x)dx.$$

Z nieosobliwości T i twierdzenia Radona-Nikodyma wynika istnienie takiej funkcji $g \in L^1(X)$, że

$$\varphi(E) = \int\limits_{E} g(x)dx,$$

czyli dla dowolnego mierzalnego E

$$\int\limits_{T^{-1}(E)} f(x)dx = \int\limits_{E} g(x)dx. \tag{2}$$

Definicja 5. Operator, który funkcji f przyporządkowuje $Pf = g$, spełniającą (2), nazywamy operatorem Frobeniusa–Perrona.

W szczególności dla $X = [0, 1]$ operator Frobeniusa–Perrona wyraża się wzorem

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{T^{-1}([0,x])} f(s)ds.$$

Ta technika posłużyła jako narzędzie dowodu twierdzenia z [18].

Twierdzenie 6 (Lasota–Yorke). *Niech* $T : [0, 1] \to [0, 1]$ *będzie odwzorowaniem spełniającym następujące warunki*:

(i) *istnieją takie punkty* $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$, *że* f *zacieśniona do* (a_{i-1}, a_i) *jest homeomorfizmem na obraz*,

(ii) *dla dowolnego* $i = 1 \ldots n$ $\inf_{x\in(a_{i-1},a_i)} |f'(x)| > 1$.

Wówczas T *dopuszcza miarę niezmienniczą, ergodyczną i absolutnie ciągłą.*

3. Miara Aveza. Przejdziemy obecnie do pewnej procedury konstrukcji miar niezmienniczych, której twórcą jest francuski matematyk André Avez. Niech M będzie rozmaitością różniczkowalną zwartą, orientowalną i niech TM oznacza wiązkę styczną do M.

DEFINICJA 7. Niech $\varphi : M \to M$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Odwzorowanie $\varphi : M \to M$ nazywamy dylatacją, jeżeli na M istnieje metryka riemannowska taka, że dla dowolnego $X \in TM$ i $n \in \mathbb{N}$

$$||D\varphi^n(x)X|| \geqslant C\lambda^n||X||$$

dla pewnego $C > 0$ i $\lambda > 1$.

W roku 1966 Avez [1] udowodnił następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli φ jest dylatacją, to na M istnieje miara μ niezmiennicza względem φ.*

Przytaczam ten wynik, głównie ze względu na technikę dowodu, która jest ciekawa sama w sobie. Niech f będzie funkcją ciągłą na M. Określmy

$$(T_\varphi)(m) = (\deg\varphi)^{-1} \sum_{p\in\varphi^{-1}(\{m\})} f(p),$$

ponadto

$$f_n(m) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(T_\varphi^k(m)\right).$$

Wystarczy teraz zauważyć, że rodzina $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest równociągła, więc na mocy twierdzenia Arzeli można wybrać podciąg zbieżny. Z kolei z twierdzenia ergodycznego Yosidy [24] można wywnioskować, że istnieje taka funkcja $\mu(f)$, że

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mu(f)\| = 0.$$

Dla dokończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $\mu(f)$ jest funkcją stałą. Funkcjonał

$$C(X) \ni f \mapsto \mu(f) \in \mathbb{R}$$

jest oczywiście liniowy, zatem istnieje taka miara μ, że dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$

$$\mu(f) = \int_M f(m)\mu(dm).$$

W dalszej części swojej pracy Avez dowodzi, że przy pewnych dodatkowych założeniach miara ta jest ergodyczna. Wynik Aveza uogólnili Krzyżewski i Szlenk [12].

4. Transformacje N-adyczne. Przytoczona wyżej technika dowodu została sformalizowana w pracy [14]. Wymaga to jednak wprowadzenia pewnego pojęcia, które jest ciekawe samo w sobie. Rozważmy przestrzeń ℓ^∞ ciągów ograniczonych i określmy funkcjonał L na przestrzeni

$$\left\{\{a_n\} : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}\right\}$$

wzorem

$$L\left(\{a_n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}. \tag{3}$$

Tak określony funkcjonał jest liniowy, ograniczony i jego norma w sensie przestrzeni ℓ^∞ jest równa 1. Na mocy twierdzenia Hahna–Banacha funkcjonał ten można rozszerzyć do funkcjonału liniowego i ograniczonego o normie równej 1 na całej przestrzeni ℓ^∞.

Definicja 9. Granicą Banacha nazywamy funkcjonał

$$\mathrm{Lim}_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$$

będący rozszerzeniem funkcjonału L, określonego wzorem (3), do funkcjonału liniowego o normie równej 1 na całej ℓ^∞.

Niech teraz $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym na przestrzeni Hausdorffa X i niech $Y \subset X$.

Definicja 10. Odwzorowanie $S : Y \to X$ nazywamy prawym odwrotnym do T, jeżeli $T \circ S = \mathrm{id}_Y$ i $S(Y) \subset Y$.

Niech teraz $S_0, \ldots, S_{N-1}$ będą prawymi odwrotnymi do T i niech $S_{k_1,\ldots,k_n} = S_{k_1} \circ \ldots \circ S_{k_n}$. Określmy funkcjonał na $C(Y)$ wzorem

$$Af = \mathrm{Lim}_n \frac{1}{N^n} \sum_{k_1,\cdots k_n} f\left(S_{k_1,\ldots,k_n}(y_0)\right)$$

przy pewnym ustalonym $y_0 \in Y$. Zgodnie z twierdzeniem Riesza istnieje miara regularna μ na Y, taka że

$$Af = \int_Y f(x)\mu(dx).$$

Określamy teraz miarę m na X wzorem

$$m(E) = \mu(E \cap Y). \tag{4}$$

W pracy [14] udowodnione jest

Twierdzenie 11. *Miara m określona wzorem (4) jest niezmiennicza względem T.*

Konsekwencją tego twierdzenia jest następujące, również udowodnione w pracy [14], twierdzenie.

Twierdzenie 12. *Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem przestrzeni Hausdorffa X w siebie. Załóżmy, że istnieje rodzina $A_0, \ldots, A_{N-1}$ zwartych, niepustych podzbiorów X, takich że*

$$\bigcap_{k=0}^{N-1} T(A_k) \supset \bigcup_{k=0}^{N-1} A_k. \tag{5}$$

Wówczas na X istnieje ciągła miara niezmiennicza względem T.

W pracy tej zostało udowodnione, że dla $N = 2$ miara ta jest ergodyczna.

5. Równanie Lasoty. Z punktu widzenia zastosowań szczególnie interesujący jest chaos na przestrzeniach funkcyjnych w przypadku, gdy układ dynamiczny zadany jest przez równanie cząstkowe. Związki chaosu z istnieniem miary niezmienniczej w tej sytuacji badali m.in. Prodi [21], Foiaş [9] i Hopf [10]. W ostatnich latach przeglądową pracę opublikował Rudnicki [23]. W tym kontekście przedmiotem zainteresowań wielu matematyków jest równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda u,$$

pierwszy raz sformułowane w pracy [13], zwane dziś równaniem Lasoty. Równanie to jest modyfikacją równania von Foerstera i opisuje dynamikę populacji komórek. Rozpatrzmy następujący problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda u \\ u(x,0) = v(x) \\ t \geq 0, \quad x \in [0,1] \end{cases} \tag{6}$$

Na przestrzeni V – funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ i zerujących się w zerze, problem ten generuje układ dynamiczny $\{T_t\}_{t\geq 0}$ wzorem

$$(T_t v)(x) = u(x,t).$$

Można go efektywnie opisać wzorem

$$(T_t v)(x) = e^{\lambda t} v\left(xe^{-t}\right). \tag{7}$$

Załóżmy, że $\lambda \geq 2$ i rozpatrzmy przestrzeń W_λ – wszystkich funkcji v na przedziale $[0,1]$, takich że:

- $v(0) = v'(0) = 0$,
- v' jest absolutnie ciągła,
- $|v''(x)| \leq x^{\lambda-2}$.

Zanim zastanowimy się nad chaosem dla czasu ciągłego, przyjrzyjmy się jego dyskretyzacji.

Twierdzenie 13. *Załóżmy, że* $\lambda > 2$, $\alpha = \lambda - 1$. *Wówczas odwzorowanie* $T = T_{\ln 2}$ *na przestrzeni* W_λ *jest pseudodiadyczne*, *tzn. że spełnia założenia twierdzenia 12 dla* $N = 2$.

Dowód. Niech

$$A = \left\{ w \ \in W_\lambda : w'(x) = w'\left(\frac{1}{2}\right) \ \text{dla} \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\},$$

$$B = \left\{ w \ \in W_\lambda : w'(x) = w'\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \ \text{dla} \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}.$$

□

Oczywiście, na W_λ istnieje miara m_0 niezmiennicza względem T. Określając miarę m wzorem

$$m(E) = \int_0^{\ln 2} m_0\left(T_s^{-1}(E)\right) ds$$

otrzymujemy miarę niezmienniczą względem układu $\{T_t\}_{t \geq 0}$.

Przyjrzyjmy się dokładniej konstrukcji miary m_0. W tym celu zauważmy, że $Tw(x) = 2^\lambda w\left(\frac{x}{2}\right)$. Rozważmy dwa odwzorowania określone wzorami

$$(S_1 w)(x) = \begin{cases} 2^{-\lambda} w(2x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2^{-\lambda}\left(w(1) + w'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) & \text{dla } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

oraz

$$(S_2 w)(x) = \begin{cases} 2^{-\lambda} w(2x) & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2^{-\lambda}\left(w(1) + w'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + (\alpha\lambda)^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{\lambda}\right) & \\ & \text{dla } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Z konstrukcji wynika, że S_1 i S_2 nie wyprowadzają z przestrzeni W_λ i są prawymi odwrotnymi do T. To one właśnie pozwalają metodą Aveza skonstruować miarę m_0. Asymptotyczne zachowanie równania Lasoty było badane przez licznych matematyków. W szczególności, Łoskot [19] badał turbulencję w sensie Bassa, a Rudnicki [22] skonstruował miarę niezmienniczą w oparciu o własności procesu Ornsteina–Uhlenbecka. Miarami niezmienniczymi dla powyższego równania zajmowali się też w ostatnich latach Peradzyński [20], Lasota i Szarek [15].

6. Uogólnione miary Aveza. W pracach [4, 5] udowodniono następujące

Twierdzenie 14. *Niech* $\{T_t\}_{t \geq 0}$ *będzie układem dynamicznym zadanym wzorem* (7) *na przestrzeni* V *– funkcji lipshitzowskich na* $[0, 1]$ *zerujących się w zerze oraz niech* $\lambda > 0$. *Wówczas istnieje miara skończona borelowska* μ *na* V, *niezmiennicza względem układu* $\{T_t\}_{t \geq 0}$, *ergodyczna*, *dodatnia na* *zbiorach otwartych niepustych i taka, że $\mu(E_0) = 0$, gdzie E_0 oznacza zbiór wszystkich punktów okresowych i stałych.*

W dowodzie tego twierdzenia, zamiast skończonej rodziny prawych odwrotnych, rozważany jest ciąg prawych odwrotnych $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ określonych wzorami

$$(S_n v)(x) = \begin{cases} 2^{-\lambda} v(2x) & \text{dla } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2^{-\lambda}\left(v(1) + \sigma_n\right) & \text{dla } \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

gdzie $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest stosownie dobranym ciągiem funkcji z V. Nieskończony ciąg prawych odwrotnych stwarza nowe problemy – traci sens wyrażenie

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k_1,\cdots k_n} f\left(S_{k_1,\ldots,k_n}(y_0)\right).$$

Trzeba zatem wprowadzić ciąg liczb dodatnich $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Wówczas wyrażenie $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S_n x)$ można zastąpić przez wyrażenie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n f(S_n x)$. W praktyce ciąg $\{p_n\}$ zadaje miarę na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, taką że jej wartość na zbiorze $\{\{k_n\} : k_i = r_i \text{ dla } i = 1, \ldots, m\}$ jest równa $p_1 \cdots p_m$. Szukana miara jest transportem tej miary przez odwzorowanie, które ciągowi $\{k_n\}$ przyporządkowuje jedyny element zbioru

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} S_{k_1\ldots k_n}(V). \tag{8}$$

Nietrudno udowodnić, że zbiór ten jest zawsze co najwyżej jednoelementowy. Można tak dobrać ciągi $\{\sigma_n\}$ i $\{p_n\}$, że tych ciągów $\{k_n\}$, dla których zbiór (8) jest niepusty, jest miary zero. Dalsze uogólnienie metody Aveza zaprezentowane jest w pracy [6], gdzie zamiast ciągu prawych odwrotnych wzięta jest rodzina prawych odwrotnych, na której określona jest stosowna miara. Konstrukcja się jednak nie różni.

7. Chaos, jako własność trajektorii. W pracy [13] oprócz istnienia miary niezmienniczej wykazano istnienie trajektorii turbulentnej dla odwzorowań pseudodiadycznych. W przypadku dyskretnym trajektoria turbulentna jest zdefiniowana jako trajektoria, która nie jest stała ani okresowa. Mankamentem stosowania metody Aveza dla modeli opisywanych równaniem Lasoty jest jednak fakt, że dla badania chaosu dla układu z czasem ciągłym redukujemy de facto problem do problemu z czasem dyskretnym. W roku 1988 Devaney podał następującą definicję chaosu.

Definicja 15. Układ $\{T_t\}_{t\ge 0}$ na przestrzeni metrycznej X jest chaotyczny, jeżeli

- posiada własność wrażliwości na zmianę, tzn. że istnieje taka stała $M > 0$, że dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $y \in K(x, \varepsilon)$ oraz $t > 0$ spełniające $\rho(T_t x, T_t y) > M$;

- jest topologicznie tranzytywny, tzn. że dla dowolnych dwóch zbiorów otwartych i niepustych $U, V \subset X$ istnieje $t > 0$, takie że $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$;
- zbiór punktów okresowych jest gęsty.

Dziś wiemy [3], że pierwszy warunek nie jest potrzebny, gdyż wynika z pozostałych dwu. Definicja została wprawdzie, w oryginalnej pracy, podana dla czasu dyskretnego, ale jest powszechnie stosowana również dla czasu ciągłego [2]. Okazuje się [7, 8], że do zbadania chaosu w sensie Devaney'a też można stosować technikę analogiczną do Avezowskiej, unikając przy tym dyskretyzacji.

Literatura

[1] André Avez, *Propriétés ergodiques des endomorphismes dilatants des variétés compactes*, C.R. Acad. Sc. Paris (1968), no. 266, 610-612.

[2] Jacek Banasiak, *Chaotyczne liniowe układy dynamiczne: teoria i zastosowania*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria II: Wiadomosci Matematyczne **XLI** (2005), 1-29.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332-334.

[4] Antoni Leon Dawidowicz, *On the existence of an invariant measure for the dynamical system generated by partial differential equation*, Ann.Pol. Math. **XLI** (1983), 129-137.

[5] Antoni Leon Dawidowicz, *On the positivity of an invariant measure on open nonempty sets*, Ann. Polon. Math. **50** (1989), no. 2, 185-190.

[6] Antoni Leon Dawidowicz, *On the generalized avez method*, Ann.Pol. Math. **LVII** (1992), 209-218.

[7] Antoni Leon Dawidowicz and Najemedin Haribash, *On the periodic solutions of von Foerster type equation*, Universitati Iagellonicae Acta Mathematica (1999), no. 37, 321-324.

[8] —, *On the dense trajectory of Lasota equation*, Universitati Iagellonicae Acta Mathematica (2005), no. 43, 61-66.

[9] Ciprian Foiaş, *Statistical study for Navier-Stokes equaeion*, Rendiconti del Seminario Matematico Universita di Padova **48, 49** (1972, 1973), 219-348, 9-123.

[10] Eberhard Hopf, *A mathematical displying features of turbulence*, Commun. Pure Appl. Math. **1** (1948), 215-233.

[11] Nikolay Mitrofanovich Kryloff and Nikolai Nikolaevich Bogoluboff, *La théorie générale de la mesure et son application à l'étude des systèmes dynamiques et de la mécanique non linéaire*, Ann. of Math. **38** (1937), 65-113.

[12] Karol Krzyżewski and Wiesław Szlenk, *On the existence of invariant measures for expanding differentiable mappings*, Studia Mathematica **33** (1969), 83-92.

[13] Andrzej Lasota, *Invariant measures and a linear model of turbulence*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universita di Padova **61** (1979), 39-48.

[14] Andrzej Lasota and Gulio Pianigiani, *Invariant measures on topological spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. **5** (1977), no. 15-B, 592-603.

[15] Andrzej Lasota and Tomasz Szarek, *Dimension of measures invariant with respect to Ważewska partial differential equations*, J. Differential Equations **196** (2004), no. 2, 448-465.

[16] Andrzej Lasota and Maria Ważewska-Czyżewska, *Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych*, Matematyka Stosowana **6** (1976), 23-40.
[17] Andrzej Lasota, Maria Ważewska-Czyżewska and Michael C. Mackey, *Minimizing therapeutically induced anemia*, Journal of Mathematical Biology **13** (1981), 149-158.
[18] Andrzej Lasota and James A. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Transactions of the American Mathematical Society **186** (1973), 481-488.
[19] Krzysztof Łoskot, *Turbulent solutions of first order partial differential equation*, J. Differential Equations **58** (1985), no. 1, 1-14.
[20] Zbigniew Peradzynski, *Short wave asymptotics and chaotic solutions*, Abstract for Dynamics Days Crete, 2006.
[21] Giovanni Prodi, *Teoremi ergodici per le equazioni della idrodinamica*, C.I.M.E. Roma (1960).
[22] Ryszard Rudnicki, *Invariant measures for the flow of a first order partial differential equation*, Ergodic Th. & Dyn. Sys. **5** (1985), no. 3, 437-443.
[23] —, *Chaos for some infinite-dimensional dynamical systems*, Math. Met. Appl. Sci. **27** (2004), 723-738.
[24] Kosaku Yosida, *Functional analysis*, Springer, 1966.

Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Reymonta 4/510, 30-059 Kraków
E-mail: Antoni.Leon.Dawidowicz@im.uj.edu.pl

On the Avez method and its generalizations

Abstract. In this paper the method of construction of invariant measure are presented. Particularly the method of Avez is presented. This method was used by Professor Lasota.
Key words: invariant measure, ergodic properties.

(*wpłynęło 11 maja 2007 r.*)