DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA 7, 2006

Izabella Czochralska (Warszawa)

Metoda rozwiązywania układu równań liniowych z symetryczną, nieokreśloną macierzą współczynników (0)

Streszczenie. W pracy zaadaptowano opracowaną w [1] metodę diagonalizacji macierzy symetrycznej do rozwiązywania nieosobliwych (cramerowskich) układów równań liniowych z symetryczną, nieokreśloną macierzą współczynników. Algorytm sprowadza się do pewnej modyfikacji symetrycznej procedury eliminacji Gaussa.

Słowa kluczowe: eliminacja Gaussa, rozkład trójkątny i trójkątno-diagonalny macierzy, stabilna diagonalizacja symetrycznej macierzy nieokreślonej.

1. Wprowadzenie. Rozważmy cramerowski układ równań liniowych

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

z nieosobliwą macierzą współczynników $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stopnia n, wektorem zmiennych $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz wektorem wyrazów wolnych $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$.

Znanych jest wiele skutecznych i zaprogramowanych metod, zarówno dokładnych (bezpośrednich), jak i iteracyjnych, rozwiązywania układu (1) z macierzą pełną lub rzadką, małych lub dużych wymiarów.

Metody bezpośrednie prowadzą m.in. do rozkładu macierzy $\mathbf{A}$ lub równoważnych jej permutacji $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_w\mathbf{A}$ — na wierszach, czy $\widetilde{\widetilde{\mathbf{A}}} = \mathbf{P}_w\mathbf{A}\mathbf{P}_k$ — na wierszach i kolumnach, na iloczyn $\mathbf{LR} = \mathbf{LDR}_1$ macierzy nieosobliwych, gdzie $\mathbf{L}$ oraz $\mathbf{R}_1$ są macierzami trójkątnymi z jedynkami na przekątnych, dolną i górną odpowiednio, zaś $\mathbf{R}$ — górną macierzą trójkątną o przekątnej wyznaczającej macierz diagonalną $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn})$. Następnie rozwiązuje się sekwencję prostych układów równań liniowych aż do uzyskania rozwiązania układu (1). Tu $\mathbf{P}_w$ oraz $\mathbf{P}_k$ są odpowiednio macierzami permutacji wierszy i kolumn macierzy $\mathbf{A}$, a więc macierzami ortogonalnymi.

Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna, stosuje się z reguły metody bezpośrednie, a więc symetryczną procedurę eliminacji Gaussa lub jej modyfikacje. Należy podkreślić, że w każdej k-tej ($k \in \overline{1, n-1}$) (1) iteracji I fazy zwy-

(0) Jest to oryginalna wersja artykułu.

(1) $\overline{k, n}$ oznacza zbiór kolejnych liczb całkowitych o najmniejszej k i największej n, gdy $k \le n$.

kłej eliminacji Gaussa, otrzymywane macierze zredukowane $\mathbf{M}^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ $(i, j \in \overline{k+1, n})$ są także symetryczne, a to prawie dwukrotnie redukuje koszt obliczeń — liczbę wykonanych działań i obciążenie pamięci komputera, gdyż można pominąć obliczanie elementów pod (lub nad) przekątną. Jeśli dodatkowo macierz $\mathbf{A}$ jest *dodatnio* (*ujemnie*) *określona* lub *diagonalnie dominująca*, to macierze zredukowane $\mathbf{M}^{(k)}$ też mają tę samą własność. Stwarza to możliwość skutecznej eliminacji układu (1) bez wyboru elementu głównego. W przypadku macierzy dodatnio (lub ujemnie) określonej elementy główne macierzy zredukowanych są diagonalne, ale nie zawsze kierujące eliminacją, więc z ich wyborem można zwiększyć stabilność obliczeń bez naruszania symetrii tych macierzy, a także określoności. Wtedy otrzymujemy rozkład symetrycznej permutacji macierzy $\mathbf{A}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^T = \mathbf{LDL}^T = \operatorname{sign}(d_{11})\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^T. \tag{2}$$

Ostatnia równość w (2) jest wynikiem metody Cholesky'ego–Banachiewicza i różni się od eliminacji Gaussa kosztownym obliczaniem pierwiastków elementów diagonalnych, bowiem $\widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\widehat{\mathbf{D}}$, gdzie $\widehat{\mathbf{D}} = \operatorname{diag}(\sqrt{|d_{11}|}, \ldots, \sqrt{|d_m|})$.

Dla symetrycznych macierzy *półokreślonych* ([2]) (*dodatnio* lub *ujemnie*) i pewnych *nieokreślonych* możliwy jest tylko rozkład trójkątno-diagonalny:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^T = \mathbf{LDL}^T \tag{3}$$

z uwagi na istnienie różnych znaków elementów diagonalnych macierzy $\mathbf{D}$ w przypadku nieokreśloności lub zera w przypadku półokreśloności macierzy $\mathbf{A}$.

Powyższe rozważania wskazują na to, że problem symetrycznego rozkładu (3) macierzy $\mathbf{A}$ może się załamać wyłącznie wtedy, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest *nieokreślona* i w procesie eliminacji dla pewnego $k \in \overline{1, n-1}$ macierz zredukowana $\mathbf{M}^{(k-1)}$ (przyjmujemy, że $\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{A}$) ma element główny poza przekątną lub zerowe elementy diagonalne w niezerowych kolumnach (i w tych samych wierszach). Odpowiada to macierzy typu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{dla } |\varepsilon| \ll 1 \tag{4}$$

lub

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Rozkład symetryczny typu (3) nie jest stabilny w przypadku (4), bo nie da się zrealizować z wyborem elementu głównego, a w przypadku (5) jest nawet niemożliwy. Taki problem daje się jednak rozwiązać za pomocą algorytmu diagonalizacji macierzy $\mathbf{A}$ z pracy [1] lub poprzez symetryczny

([2]) Takie macierze są osobliwe, więc temat naszych rozważań ich nie obejmuje.

rozkład blokowo-trójkątny, zaproponowany w [2], ale niestabilny w prostej postaci lub zbyt kosztowny ze stabilizującym wyborem elementu głównego.

2. Algorytm diagonalizacji macierzy symetrycznej. W pracy [1] podano prosty, tani i stabilny *algorytm badania określoności* symetrycznej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, którego związek z I fazą symetrycznego wariantu metody eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego zasugerowano w rozdziale 1. Reguła stopu obliczeń i określenie wyniku opiera się w tym algorytmie na łatwych do sprawdzenia kryteriach — trzech warunkach koniecznych spełnionych przez symetryczną macierz określoną lub półokreśloną, a mianowicie:

- elementy diagonalne są tego samego znaku lub istnieje jeszcze element zerowy;
- jeśli istnieje zerowy element diagonalny, to jego kolumna i wiersz są wektorami zerowymi (wtedy macierz może być co najwyżej półokreślona);
- element główny jest diagonalny.

Koszt realizacji takiego algorytmu (por. [1]) nie przekracza połowy kosztu obliczenia dowolnego wyznacznika macierzy n-tego stopnia, a w przypadku macierzy nieokreślonej może być zdecydowanie niższy — wystarczy, że któreś z wymienionych kryteriów nie jest spełnione przez pewną macierz $\mathbf{M}^{(k)}$ ($k \in \overline{0, n-1}$). Możemy zatem konwencjonalnie podać, że cały proces nie przekracza $\sim n^3/6$ działań dodawania i mnożenia, tyleż porównań i $\sim n^2/2$ miejsc pamięci komputera. Porównania i ewentualne symetryczne permutacje mogą jedynie wydłużyć czas pracy komputera, ale nie mają wpływu na stabilność metody.

Uwaga 1. Jeśli symetryczna macierz $\mathbf{A}$ jest określona lub półokreślona, to w wyniku realizacji algorytmu otrzymamy macierz trójkątną $\mathbf{R}$, której przekątna określa postać diagonalną macierzy $\mathbf{A}$, czyli $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn})$, jak w warunku (3). Również dla każdej nieokreślonej macierzy $\mathbf{A}$, gdy tylko jest możliwy jej stabilny rozkład (3), a więc w kontynuacji algorytmu bez względu na pojawienie się reguły stopu (informacja o nieokreśloności macierzy), otrzymamy w prosty sposób jej diagonalną postać.

Schemat stabilizacji algorytmu diagonalizacji. Gdy w kolejnej k-tej ($k \in \overline{1, n-1}$) iteracji diagonalizacji macierzy $\mathbf{A}$ załamuje się stabilność obliczeń, czyli pojawia się przypadek (4) lub (5) macierzy zredukowanej $\mathbf{M}^{(k-1)}$, można dokonać następującej korekty algorytmu:

Krok 1. Wyznaczamy element $a_{pq}^{(k-1)} \in \mathbf{M}^{(k-1)}$ dla $p > k$ oraz $k \le q < p$ taki, że $|a_{pq}^{(k-1)}| = \max\{|a_{ij}^{(k-1)}| : i \in \overline{k, n},\ j \in \overline{k, i}\}$, a następnie sprawdzamy, czy $|a_{pp}^{(k-1)}| \ge |a_{qq}^{(k-1)}|$. Jeśli tak, to przestawiamy miejscami wiersze k-ty i p-ty, a następnie kolumny o tych samych numerach i realizujemy krok 2. W przeciwnym razie sprawdzamy, czy $q = k$. Jeśli tak, to realizujemy krok 3; jeśli nie, to przestawiamy miejscami wiersze k-ty i q-ty, a następnie kolumny o tych samych numerach i realizujemy krok 3.

Dla wygody dalszego opisu schematu oznaczamy otrzymaną w kroku 1 macierz symbolem $\overline{\mathbf{M}}^{(k-1)} = (\overline{a}_{ij}^{(k-1)})$, $i, j \in \overline{k, n}$.

Krok 2. Obecnie $\overline{a}_{kk}^{(k-1)} = a_{pp}^{(k-1)}$ oraz $\overline{a}_{kq}^{(k-1)} = \overline{a}_{qk}^{(k-1)} = a_{pq}^{(k-1)}$. Jeśli $\overline{a}_{kk}^{(k-1)} = 0$ lub $\operatorname{sign} \overline{a}_{kk}^{(k-1)} = \operatorname{sign} \overline{a}_{kq}^{(k-1)} = \operatorname{sign} a_{pq}^{(k-1)}$, to wiersz q-ty dodajemy do k-tego, a następnie kolumnę q-tą do k-tej i przechodzimy do kroku 4. Jeśli zaś $\operatorname{sign} \overline{a}_{kk}^{(k-1)} = -\operatorname{sign} \overline{a}_{kq}^{(k-1)} = -\operatorname{sign} a_{pq}^{(k-1)}$, to wiersz q-ty odejmujemy od k-tego, a następnie kolumnę q-tą od k-tej i realizujemy krok 4.

Krok 3. Teraz $\overline{a}_{kk}^{(k-1)} = a_{qq}^{(k-1)}$ oraz $\overline{a}_{kp}^{(k-1)} = \overline{a}_{pk}^{(k-1)} = a_{pq}^{(k-1)}$. Jeśli $\overline{a}_{kk}^{(k-1)} = 0$ lub $\operatorname{sign} \overline{a}_{kk}^{(k-1)} = \operatorname{sign} \overline{a}_{kp}^{(k-1)} = \operatorname{sign} a_{pq}^{(k-1)}$, to wiersz p-ty dodajemy do k-tego, a następnie kolumnę p-tą do k-tej i przechodzimy do kroku 4. Jeśli zaś $\operatorname{sign} \overline{a}_{kk}^{(k-1)} = -\operatorname{sign} \overline{a}_{kp}^{(k-1)} = -\operatorname{sign} a_{pq}^{(k-1)}$, to wiersz p-ty odejmujemy od k-tego, a następnie kolumnę p-tą od k-tej i realizujemy krok 4.

Oznaczamy symbolem $\overline{\overline{\mathbf{M}}}^{(k-1)} = (\overline{\overline{a}}_{ij}^{(k-1)})$, $i, j \in \overline{k, n}$, macierz otrzymaną w kroku 2 lub 3. Obecnie $|\overline{\overline{a}}_{kk}^{(k-1)}| \geq 2|a_{pq}^{(k-1)}| \geq \max\{\overline{\overline{a}}_{ij}^{(k-1)} : i, j \in \overline{k, n}\}$.

Krok 4. Kontynuujemy eliminację stabilizowaną wyborem elementu głównego częściowo diagonalnej macierzy $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^{(k-1)}$, otrzymując w wyniku macierz $\mathbf{A}^{(k)}$, ale konkretne działania wykonujemy tylko na macierzy $\overline{\overline{\mathbf{M}}}^{(k-1)}$.

W reprezentacji macierzowej proces realizacji zmodyfikowanej opisanym schematem k-tej iteracji diagonalizacji macierzy $\mathbf{A}$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{L}_k^{-1} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^{(k)} \mathbf{L}_k^{-T} = \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{P}_k^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{L}_k^{-T}, \tag{6}$$

gdzie: $\mathbf{P}_k$ jest macierzą permutacji wierszy, $\mathbf{P}_k^T$ — kolumn, określonych w kroku 1, $\mathbf{C}_k$ jest macierzą elementarną operacji dodawania wierszy, $\mathbf{C}_k^T$ — kolumn, użytych w kroku 2 lub 3, zaś $\mathbf{L}_k^{-1}$ — dolną macierzą trójkątną uzyskaną w kroku 4.

Uwaga 2. Podany schemat stabilizacji algorytmu diagonalizacji nieokreślonej macierzy $\mathbf{A}$ jest niewielką, ale bardziej skuteczną modyfikacją procedury z pracy [1]. Skonstruowany w krokach 1–3 element diagonalny $\overline{\overline{a}}_{kk}^{(k-1)}$ jest elementem głównym macierzy $\overline{\overline{\mathbf{M}}}^{(k-1)}$, a w pewnych przypadkach może się okazać nawet dominującym w jego kolumnie i wierszu. Realizacja schematu w k-tej iteracji wymaga co najwyżej $2(n-k+1)$ działań dodawania, a zatem liczba tych działań w całym procesie diagonalizacji może wzrosnąć o $(n-1)(n+2)$.

Przykład. Macierz nieosobliwa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

jest symetryczna, nieokreślona i spełnia warunki (4) i (5). Przekształcając ją według powyższego schematu, otrzymujemy

$$\mathbf{M}^{(0)} \overset{w_1 \sim w_2}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \overset{k_1 \sim k_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{M}}^{(0)},$$

$$\overline{\mathbf{M}}^{(0)} \overset{w_1 + w_3}{\sim} \begin{bmatrix} 12 & 11 & 9 \\ 5 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \overset{k_1 + k_3}{\sim} \begin{bmatrix} 21 & 11 & 9 \\ 11 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}^{(0)},$$

a więc macierz z dominującym elementem głównym w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie. Dokonując eliminacji pierwszej kolumny, otrzymujemy macierz zredukowaną

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} -121/21 & 27/21 \\ 27/21 & -81/21 \end{bmatrix}$$

diagonalnie dominującą (nawet ujemnie określoną), której dalsza eliminacja nie wymaga nawet wyboru elementu głównego. Zatem w następnej iteracji kończymy eliminację i otrzymujemy macierz

$$\mathbf{M}^{(2)} = (-432/121).$$

Macierz $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\overline{a}_{11}^{(0)}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}) = \operatorname{diag}(3, -121/21, -432/121)$ jest postacią diagonalną macierzy $\mathbf{A}$, a zgodnie z (6) ma postać iloczynu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^T\mathbf{C}^T\mathbf{L}^{-T}, \tag{7}$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/12 & 1 & 0 \\ -3/4 & 27/121 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Metoda rozwiązywania układu równań (1) z nieokreśloną macierzą współczynników. Gdy w każdej k_t-tej ($k_t \in \overline{1, n-1}$, $t \in \overline{1, r}$, $r \le n-1$) iteracji załamania się stabilności diagonalizacji symetrycznej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zastosujemy rozkład (6), to cały proces diagonalizacji można zapisać, analogicznie do (7), w postaci iloczynu macierzy:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{L}_{n-1}^{-1}\mathbf{C}_{n-1}\mathbf{P}_{n-1}\cdots\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1^T\mathbf{C}_1^T\mathbf{L}_1^{-T}\cdots\mathbf{P}_{n-1}^T\mathbf{C}_{n-1}^T\mathbf{L}_{n-1}^{-T} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}^T, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{P}_k = \mathbf{I}$, gdy $|a_{kk}^{(k-1)}| = \max\{|a_{ij}^{(k-1)}| : i \in \overline{k,n},\ j \in \overline{k,i}\}$ oraz $\mathbf{C}_k = \mathbf{I}$ dla $k \neq k_t$ $(k \in \overline{1, n-1})$.

Stąd równoważnie otrzymujemy rozkład macierzy $\mathbf{A}$ na iloczyn postaci ([3])

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{F}^{-T}. \tag{9}$$

Podstawiając rozkład (9) do układu równań (1) w miejsce nieokreślonej macierzy symetrycznej współczynników $\mathbf{A}$, okazuje się, że można go skutecznie rozwiązać przedstawioną procedurą diagonalizacji (8). Działania na wierszach macierzy $\mathbf{A}$ należy wtedy wykonywać jednocześnie na wektorze wyrazów wolnych $\mathbf{b}$, zaś działania na kolumnach, wykonywane dla zachowania symetrii i typu określoności macierzy, tylko zapamiętywać w związku z konfiguracją wektora zmiennych $\mathbf{x}$. Następnie rozwiązujemy układ równań

$$\mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{b} \tag{10}$$

i obliczamy rozwiązanie układu (1):

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^T\mathbf{y}, \tag{11}$$

mnożąc lewostronnie wektor $\mathbf{y}$ przez kolejne macierze iloczynu $\mathbf{F}^T$.

4. Uwagi końcowe. Warto wspomnieć o innym podejściu do rozwiązywania układu równań (1), polegającym na zastosowaniu różnych algorytmów *ortogonalizacji* (*metoda QR*), prowadzących do rozkładu macierzy $\mathbf{A}$ na iloczyn postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{Q}$ jest macierzą ortogonalną, a $\mathbf{R}$ — macierzą trójkątną górną.

Metoda ta jest jednak zbyt kosztowna w porównaniu z modyfikacjami algorytmu eliminacji Gaussa, by ją stosować ([4]) do rozwiązywania układu (1).

Przykładowo, rozkład nieosobliwej ([5]) macierzy $\mathbf{A}$ na iloczyn (12) *metodą ortogonalizacji Grama–Schmidta* można zrealizować w procesie rozkładu trójkątnego dodatnio określonej macierzy Grama $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ metodą Cholesky'ego–Banachiewicza, jak w (2), czyli $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$, gdzie $\mathbf{R}$ jest poszukiwaną górną macierzą trójkątną, zaś macierz ortogonalna $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}$. Przy tym macierz $\mathbf{R}^{-1}$ jest transpozycją macierzy superpozycji operacji elementarnych wykonanych na macierzy $\mathbf{G}$ podczas przekształcania jej do postaci trójkątnej $\mathbf{R}$. Złożoność obliczeniowa tego procesu jest porównywalna

([3]) Tu oznaczenie macierzy $\mathbf{F}$ zostało wprowadzone wyłącznie dla wygody zapisu wzorów.

([4]) Choć zalecana w przypadku rozwiązywania układów *nadokreślonych*, w których prostokątna macierz współczynników $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jest kolumnami regularna przy $m > n$, a wtedy $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ma tylko kolumny ortonormalne, ale tym się teraz nie zajmujemy.

([5]) Lub kolumnami regularnej w przypadku macierzy prostokątnej.

z rozwiązywaniem układu równań (1) w równoważnej mu postaci *normalnej*:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{13}$$

Obliczenie macierzy $\mathbf{G}$ oraz wektora $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ wymaga jednak podwyższonej precyzji, gdyż wprowadza znaczne zaburzenia wśród danych początkowych w trakcie wykonywania iloczynów skalarnych. Trzeba też dodać, że przedstawiona metoda ortogonalizacji Grama–Schmidta jest łatwa w zapisie i zrozumieniu, jednakże numerycznie niestabilna. Jej stabilne modyfikacje, jak też i inne sposoby wyznaczania macierzy $\mathbf{Q}$ (por. [2]), są równie kosztowne.

W związku z powyższym, metoda zaproponowana w rozdziale 3 wydaje się najbardziej zasadną w przypadku rozwiązywania rozważanego układu równań (1) z nieokreśloną macierzą współczynników. Wystarczy porównać wyniki obliczeń rozwiązywanego wyżej przykładu z postacią macierzy Grama danej tam macierzy $\mathbf{A}$, czyli:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 61 & 69 & 45 \\ 69 & 115 & 57 \\ 45 & 57 & 117 \end{bmatrix}.$$

Cytowana literatura

[1] I. Czochralska, *A verification of the definiteness of a quadratic form—its canonical form*, Badania Operacyjne i Decyzje 1 (1996), 3–26.
[2] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, Warszawa, WNT, 1992.

Instytut Ekonometrii
Szkoła Główna Handlowa
Al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa
E-mail: izabella@sgh.waw.pl

Abstract. The subject of this article is a numerically stable method for solving nonsingular Cramerian systems of linear equations, with a symmetric indefinite coefficient matrix. It consists in adapting the algorithm presented in [1] that can stably and effectively diagonalize any indefinite symmetric matrix. It is in fact some modification of the Gaussian symmetric elimination procedure.
Key words: Gaussian elimination, triangular and triangular-diagonal factorization of a matrix, numerically stable diagonalization of a symmetric indefinite matrix.

(*wpłynęło 31 lipca 2006 r.*)