MATEMATYKA STOSOWANA 7, 2006

Dorota Cendrowska (Warszawa)

Mądrość przed wiedzą, matematyka przed informatyką?

Streszczenie. „Świat potrzebuje mądrości jak nigdy dotąd, a jeśli poziom wiedzy będzie w przyszłości nadal rósł, świat będzie potrzebował mądrości w jeszcze większym stopniu niż obecnie”. Słowa te napisał Bertrand Russell w połowie zeszłego wieku. Czy mają dziś jakąś wartość? Co je łączy z matematyką, informatyką czy nawet polityką? Artykuł ten jest próbą odpowiedzi na te właśnie pytania.

Słowa kluczowe: umiejętności matematyczne, binarny klasyfikator.

1. Wprowadzenie. *„Świat potrzebuje mądrości jak nigdy dotąd, a jeśli poziom wiedzy będzie w przyszłości nadal rósł, świat będzie potrzebował mądrości w jeszcze większym stopniu niż obecnie”.*[1] Słowa te, w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia, napisał Bertrand Russell — matematyk, filozof, noblista. Pomimo upływu czasu cytat ten wydaje się być dziś równie aktualny i proroczy jak pół wieku temu.

Wiedza „zaklęta” obecnie w zaawansowane technologie informatyczne sprawiać może wrażenie wszechwładnej. Siłę przytoczonych słów można by przewrotnie sparafrazować, wyrażając następującą tezę: w dzisiejszych czasach, gdy poszczególne gałęzie informatyki prześcigają same siebie, jak nigdy potrzebna jest nam matematyka, a raczej mądrość (umiejętność) korzystania z niej.

Celem tego artykułu jest zilustrowanie tej tezy na przykładzie dowodu poprawności pewnego algorytmu. W czasach, gdy „praktyczne zastosowania” są w dużo wyższej cenie niż „rozważania teoretyczne” — dowód ten jest równocześnie cichym głosem w dyskusji dotyczącej sensowności prowadzenia badań teoretycznych. W przedstawianym bowiem przypadku wnioski płynące z dowodu umożliwiły między innymi optymalizację numeryczną algorytmu podczas jego implementacji maszynowej.

2. Klasyfikacja obiektów. W szeroko pojętych inteligentnych metodach obliczeniowych znaczącą grupę stanowią metody umożliwiające klasy-

[1] “The world needs wisdom as it has never needed it before; and if the knowledge continues to increase, the world will need wisdom in the future even more than it does now” ([6]).

fikację obiektów, gdzie każdy obiekt reprezentowany jest przez jednoznacznie określony n-wymiarowy wektor cech.

W zależności od kryterium, metody te można podzielić np. ze względu na rodzaj przetwarzanych danych (możliwość przetwarzania danych symbolicznych lub jej brak), czy ze względu na ich podstawy teoretyczne, np. metody probabilistyczne czy gradientowe. Bez względu jednak na stosowaną „systematykę” tego typu metod [4] łączy je ten sam cel: podział przestrzeni wyznaczonej przez cechy (E^n) na części, w których poprawna klasyfikacja jest możliwa.

Środkiem do tego celu jest zaś zbiór uczący składający się z obiektów, których przynależność do danej klasy jest znana. Podstawowym krokiem w realizacji celu jest określenie podziału przestrzeni na części. Gdy mamy do czynienia z dwoma klasami obiektów, a przestrzeń ma być dzielona przy użyciu hiperpłaszczyzn — krokiem jest metoda badania liniowej rozdzielności dwóch zbiorów, która określa sposób podziału przestrzeni E^n, jeśli zbiory są rozdzielne liniowo.

3. Własności algorytmów badania liniowej rozdzielności dwóch zbiorów. Dwa zbiory X_1 i X_2 n-wymiarowych wektorów $\boldsymbol{x}$ reprezentujących cechy obiektów należących do dwóch klas uważa się za rozdzielne liniowo, gdy istnieje funkcja $g(\boldsymbol{x})$ taka, że:

$$(1) \qquad \begin{cases} g(\boldsymbol{x}) \geq 0, & \text{gdy } \boldsymbol{x} \in X_1, \\ g(\boldsymbol{x}) \leq 0, & \text{gdy } \boldsymbol{x} \in X_2, \end{cases} \qquad g(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$$

Zadanie metod rozdzielających dwa zbiory ogranicza się do określenia współczynników funkcji $g(\boldsymbol{x})$, która jednoznacznie określa hiperpłaszczyznę rozdzielającą, o ile taka istnieje. Pojawia się oczywiście problem, gdy zbiory nie są rozdzielne (ten przypadek nas w tym artykule nie interesuje). Paradoksalnie fakt istnienia hiperpłaszczyzny rozdzielającej dla ogólnie określonych zbiorów X_1 i X_2 rodzi innego rodzaju kłopot. Polega on na tym, że jeśli istnieje funkcja $g(\boldsymbol{x})$, oznacza to, że istnieje *de facto* nieskończenie wiele takich funkcji. Która jest więc najlepsza?

Pozornie funkcja $g(\boldsymbol{x})$ dzieli przestrzeń cech E^n na dwie podprzestrzenie E_1^n i E_2^n, w których możemy znaleźć punkty reprezentujące tylko jedną klasę, co umożliwia użycie funkcji $g(\boldsymbol{x})$ jako prostego klasyfikatora, gdzie wspomniana funkcja pełni rolę funkcji dyskryminującej. Ów klasyfikator działałby w następujący sposób: gdy $g(\boldsymbol{x}_0) > 0$, wówczas klasyfikujemy $\boldsymbol{x}_0$ jako obiekt klasy 1, w przeciwnym razie jako obiekt klasy 2.

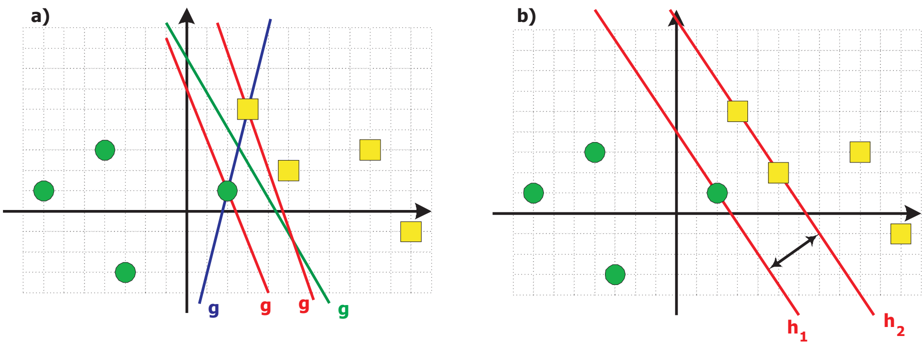
W rzeczywistości jednak funkcja $g(\boldsymbol{x})$ „po cichu” dokonuje podziału na trzy podprzestrzenie E_0^n, E_1^n i E_2^n, z czego podprzestrzeń E_0^n wyznaczona przez $g(\boldsymbol{x}) = 0$ może:

— stanowić całość z podprzestrzenią E_1^n, ze względu na zawierające się w podprzestrzeni E_0^n **tylko** punkty reprezentujące klasę 1 bądź przez analogię stanowić całość z podprzestrzenią E_2^n, jeśli zawierają się w podprzestrzeni E_0^n **wyłącznie** punkty reprezentujące obiekty klasy 2 — funkcje dyskryminujące klasyfikatorów odpowiadające tym sytuacjom to odpowiednio $g(\boldsymbol{x} \geq 0)$, $g(\boldsymbol{x} > 0)$;

— arbitralnie stanowić całość z podprzestrzenią E_1^n lub E_2^n, jeśli w podprzestrzeni E_0^n nie zawiera się **żaden** punkt $\boldsymbol{x} \in X_1 \cup X_2$;

— „być niczyja" i być źródłem wspomnianego kłopotu; dzieje się tak wówczas, gdy podprzestrzeń E^n zawiera zarówno punkty reprezentujące klasę 1, jak i klasę 2.

Rysunek 1.a zawiera przykłady wszystkich czterech omówionych możliwości.



Rys. 1. Przykłady różnych typów rozdzielności na płaszczyźnie: a) $g(\boldsymbol{x})$; b) $h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x})$.

Sytuacja wyjściowa, w jakiej się znajdujemy, jest więc następująca:

— dobra wiadomość jest taka, że jeśli zbiory X_1 i X_2 są rozdzielne liniowo, to jest nieskończenie wiele funkcji $g(\boldsymbol{x})$, a to oznacza, że mamy „duży" wybór;

— zła wiadomość to fakt, że nie wszystkie możliwe funkcje $g(\boldsymbol{x})$ są, z punktu widzenia zastosowania jako funkcji dyskryminującej klasyfikatora, „dość dobre".

Metoda rozdzielająca liniowo zbiory, której charakterystyką jest brak jakichkolwiek gwarancji dotyczących własności podprzestrzeni E_0^n, E_1^n, E_2^n, w omawianym wcześniej sensie, pozostawia wiele do życzenia z punktu widzenia praktycznych zastosowań.

Wobec tego działania, które możemy podjąć, dotyczą narzucenia dodatkowych ograniczeń na funkcję $g(\boldsymbol{x})$. Zaprezentowany w pracy [2, 3] algorytm SLS2S (Strict Linear Separability of Two Sets) zamiast funkcji $g(\boldsymbol{x})$ poszukuje współczynników określających dwie funkcje h_1 i h_2, z których każda mogłaby pełnić rolę $g(\boldsymbol{x})$ zgodnie ze wzorem (1). Obie funkcje wyznaczają hiperpłaszczyzny równoległe i jednocześnie maksymalnie od siebie oddalone — przykład zamieszczono na rysunku 1.b. Funkcje $h_1(\boldsymbol{x})$ i $h_2(\boldsymbol{x})$ określone są w następujący sposób:

$$\begin{cases} h_1(\boldsymbol{x}_1) \geq 0 \ \wedge \ h_2(\boldsymbol{x}_1) > 0, \\ h_1(\boldsymbol{x}_2) < 0 \ \wedge \ h_2(\boldsymbol{x}_2) \leq 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}_1 \in X_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in X_2,$$

$$\begin{aligned} h_1(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^* x_i + a_{n+2}^*, \\ h_2(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^* x_i + \varepsilon + a_{n+2}^*, \end{aligned} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i^*)^2 = 1,\ \varepsilon > 0,\ \max(\varepsilon). \tag{2}$$

Warunki opisujące parę hiperpłaszczyzn h_1 i h_2 (wzór (2), rysunek 1.b), kłopotliwe z punktu widzenia ewentualnej implementacji maszynowej, można zapisać w postaci jednej nierówności po zastosowaniu poniższej trasformacji:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y} = f^*(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in X = X_1 \cup X_2, \\ f^*(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 1]\,, & \text{gdzie } \boldsymbol{x} \in X_1, \\ [-x_1, -x_2, \ldots - x_n, -1, -1]\,, & \text{gdzie } \boldsymbol{x} \in X_2. \end{cases} \end{gathered} \tag{3}$$

Odpowiednikiem wspomnianych warunków są wówczas:

$$\langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0, \qquad \boldsymbol{y} \in Y = \{f^*(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in X_1 \cup X_2\} \tag{4}$$

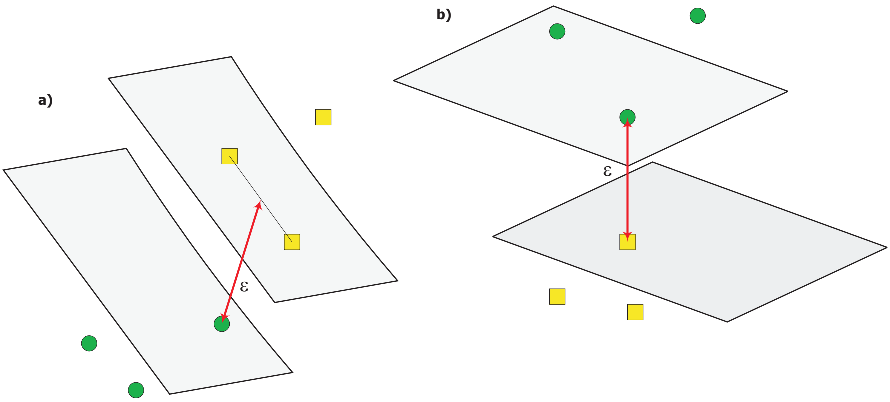
gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny, zaś

$$\boldsymbol{a}^* = [a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, \varepsilon, a_{n+2}^*] \in E^{n+2}, \tag{5}$$

przy czym $\sum_{i=1}^{n} (a_i^*)^2 = 1$.

Podkreślić należy, że choć algorytm SLS2S poszukuje rozwiązania w przestrzeni E^{n+2}, a nie w przestrzeni E^n, to pozwala ono w jednoznaczny sposób określić hiperpłaszczyzny rozdzielające h_1 i h_2 w przestrzeni wyjściowej.

Ideą leżącą u podstaw algorytmu SLS2S jest następujące spostrzeżenie. Aby **jednoznacznie** wyznaczyć pojedynczą hiperpłaszczyznę w przestrzeni E^n, wymagane jest podanie n punktów, które rozpinają podprzestrzeń E^{n-1}. Tymczasem w przypadku wyznaczania dwóch równoległych i maksymalnie od siebie oddalonych hiperpłaszczyzn h_1 i h_2 sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Do ich wyznaczenia wystarczy, aby znane były przynajmniej dwa punkty: jeden, przez który przechodzi hiperpłaszczyzna h_1, i drugi, przez który przechodzi hiperpłaszczyzna h_2. Ponieważ z założenia h_1 i h_2 mają być maksymalnie oddalone i nie pokrywające się, implikuje to ich równoległość. Wspomniane zaś punkty rozpinają w sposób jednoznaczny te hiperpłaszczyzny. Taka para punktów jest traktowana jako *minimalna lista rozpinająca*. Prosta przechodząca przez te dwa punkty wyznacza kierunek normalny obu hiperpłaszczyzn h_1 i h_2. Jeśli punktów, przez które mają przechodzić odpowiednie hiperpłaszczyzny rozdzielające, jest więcej niż dwa, mówimy po prostu o *liście rozpinającej*. Maksymalnie na tej liście może się znaleźć $n+1$ punktów. Przykłady dwóch rodzajów list rozpinających (w przestrzeni E^3) przedstawiono na rysunku 2 (2.a — trzy punkty na liście rozpinającej; 2.b — minimalna, dwupunktowa lista rozpinająca).



Rys. 2. Jednoznaczność „rozpinanych" hiperpłaszczyzn h_1 i h_2

Algorytm SLS2S jest algorytmem rekurencyjnym i w każdym wywołaniu na podstawie listy rozpinającej, przekazanej jako parametr, w kroku $p.4$ wyznaczane są hiperpłaszczyzny h_1 i h_2. Najistotniejszym etapem w badaniu poprawności tego algorytmu było stwierdzenie faktu, że wykonanie tego kroku jest zawsze możliwe. Należało pokazać, że wszystkie punkty znajdujące się na liście rozpinającej mogą jednocześnie znajdować się na odpowiednich hiperpłaszczyznach rozdzielających. Odpowiada to sytuacji, w której następujący układ równań i warunku ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\left\{\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_1 \rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_{p_1+p_2} \rangle &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (a_i^*)^2 &= 1, \\ \max(\varepsilon), & \end{aligned}\right. \tag{6}$$

gdzie p_1 i p_2 to liczba punktów reprezentujących obiekty odpowiednio klasy 1 i 2 znajdujących się na liście rozpinającej.

Na czym polegał problem? Postać zależności (6) sugeruje potrzebę rozwiązania pewnego problemu optymalizacyjnego. Tymczasem dowód istnienia rozwiązania tego układu, przedstawiony w punkcie 5, pozwala określić również algorytm uzyskiwania rozwiązania, którym są składowe wektora $\boldsymbol{a}^*$

pozwalające jednoznacznie wyznaczyć hiperpłaszczyzny rozdzielające h_1 i h_2 bez uciekania się do zastosowania wybranej metody optymalizacyjnej.

Część dowodu [3], gdy mamy do czynienia z minimalną listą rozpinającą, nie została zamieszczona w tym artykule, ponieważ jest zgodna z intuicją.

Co więcej, całość dowodu potwierdza tezę, że do jednoznacznego określenia hiperpłaszczyzn rozdzielających, zdefiniowanych zgodnie z wzorem (2), wystarczą tylko dwa elementy na liście rozpinającej, co odpowiada (geometrycznie) podaniu dwóch punktów w przestrzeni E^n, aby jednoznacznie wyznaczyć podprzestrzeń E^{n-1} — w ogólności, jak już wspomniano, tych punktów musiałoby być n.

4. Podsumowanie. Pomimo że omawiane zagadnienie nie wchodzi w zakres treści nauczanych w polskich szkołach, to poniekąd mogłoby być argumentem w toczącej się dyskusji: „czy matematyka powinna być przedmiotem obowiązkowym na maturze?". Mogłoby, gdyby Minister Edukacji Narodowej był... matematykiem, a nie „maturalnym abolicjonistą".

Dlaczego dowód przedstawiony w punkcie 5 można potraktować jako argument? Urodą tego dowodu jest to, że pomimo specyfiki materii, której dotyczy, w kluczowym miejscu wykorzystany jest materiał, z którym mają do czynienia właśnie licealiści. Układ (6) może być bowiem potraktowany jako „zagnieżdżone" równanie kwadratowe, które w ładny sposób można przedstawić w postaci formy kwadratowej. To zaś ma bezpośredni wpływ na sposób wyznaczania poszukiwanych składowych wektora $\boldsymbol{a}^*$ w dowodzie, co w konsekwencji pozwala na uzyskanie numerycznej stabilności podczas maszynowego obliczania składowych poszukiwanego wektora, a także optymalizację kroku p.4 algorytmu SLS2S.

Dowód ten jest również „dowodem", że matematyka może być źródłem ciekawych spotkań międzypokoleniowych. Nie byłby bowiem możliwy do pokazania Państwu, gdyby nie Pan prof. Stefan Paszkowski[2], który był właściwą osobą, na właściwym miejscu, we właściwym czasie; co jak się dużo później okazało, było również dla Niego inspirujące [5].

Podsumowując, nigdy nie wiadomo, kiedy człowieka „dogoni" potrzeba znajomości matematyki z zakresu szkoły średniej, no chyba, że jest się Ministrem Edukacji Narodowej, ale tego Państwu nie życzę.

Może uda się ocalić matematykę w szkołach, bo w niejednej sytuacji może ona uratować nowe idee i pomysły zamiast „niszczyć" przyszłość Młodego Człowieka.

5. Dowód poprawności kroku *p*.4 algorytmu SLS2S. W dowodzie zakładamy, że liczba punktów, przez które mają przechodzić odpowiednie hiperpłaszczyzny rozdzielające, jest większa od dwóch.

[2]Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN, Wrocław.

Bez utraty ogólności możemy przyjać, że lista rozpinająca zawiera p_1 punktów (wektorów, otrzymanych po zastosowaniu przekształcenia (3)), które początkowo należą do zbioru X_1 i reprezentują obiekty klasy 1, oraz analogicznie p_2 punktów, które początkowo należą do zbioru X_2 i reprezentują obiekty klasy 2.

Krok $p.4$ algorytmu SLS2S, wyznaczający współczynniki umożliwiające określenie hiperpłaszczyzn rozdzielających, jest poprawnie zdefiniowany, jeśli uda się pokazać, że poniższy układ równań i warunku ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\left\{\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_1 \rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_{p_1} \rangle &= 0, \\ \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_{p_1+1} \rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}_{p_1+p_2} \rangle &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (a_i^*)^2 &= 1, \\ \max(\varepsilon)&. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Wobec przyjętych założeń układ ten możemy zapisać w postaci

$$\left\{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{1,\,n} & 0 & 1 \\ y_{2,1} & \cdots & y_{2,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{2,\,n} & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p_1,1} & \cdots & y_{p_1,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{p_1,\,n} & 0 & 1 \\ y_{p_1+1,1} & \cdots & y_{p_1+1,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{p_1+1,\,n} & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p_1+p_2,1} & \cdots & y_{p_1+p_2,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{p_1+p_2,\,n} & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_n^* \\ \varepsilon \\ a_{n+2}^* \end{bmatrix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (a_i^*)^2 = 1, \\ \max(\varepsilon). \end{array}\right. \tag{8}$$

Z pierwszego równania układu (8) wyznaczamy niewiadomą a_{n+2}^*. Umożliwi to wyrugowanie jej z pozostałych równań, ponieważ nie jest ona uwikłana w równanie stopnia drugiego. Z kolejnych $(p_1+p_2)-1$ równań metodą eliminacji Gaussa wyznaczamy $(p_1+p_2)-1$ współczynników poszukiwanego wektora $\boldsymbol{a}^*$, czyli a_i^* dla $i = 1, \ldots, (p_1+p_2)-1$. Otrzymujemy wówczas układ równań

(9)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_{1,\,1} & y_{1,\,2} & \dots & y_{1,\,p_1+p_2-1} & y_{1,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{1,\,n} & 0 & 1 \\ 1 & y^*_{2,\,2} & \dots & y^*_{2,\,p_1+p_2-1} & y^*_{2,\,p_1+p_2} & \cdots & y^*_{2,\,n} & y^*_{2,\,n+1} & 0 \\ 0 & 1 & \dots & y^*_{3,\,p_1+p_2-1} & y^*_{3,\,p_1+p_2} & \cdots & y^*_{3,\,n} & y^*_{3,\,n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y^*_{p_1+p_2,\,p_1+p_2} & \cdots & y^*_{p_1+p_2,\,n} & y^*_{p_1+p_2,\,n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_1 \\ a^*_2 \\ \vdots \\ a^*_n \\ \varepsilon \\ a^*_{n+2} \end{bmatrix} = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a^*_i)^2 = 1, \\ \max(\varepsilon), \end{cases}$$

w którym wyrazy nowej macierzy oznaczono gwiazdkami. Dla zachowania struktury trójkątnej dokonano niezbędnych przestawień wierszy.

Stosując metodę podstawień wyznaczonych składowych a^*_i dla $i = 2, \dots, p_1 + p_2 - 1$ do odpowiednich równań, otrzymujemy $p_1 + p_2 - 1$ pierwszych współczynników w zależności od pozostałych współczynników: ε i a^*_i, dla $i = p_1 + p_2, \dots, n$. Symbolicznie zaznaczono to w układzie (10). Równanie stopnia drugiego możemy rozdzielić na współczynniki dotychczas wyznaczone (grupa I) i na te, o których nic jeszcze nie wiemy (grupa II):

(10)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_{1,\,1} & y_{1,\,2} & \dots & y_{1,\,p_1+p_2-1} & y_{1,\,p_1+p_2} & \cdots & y_{1,\,n} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & y^{**}_{2,\,p_1+p_2} & \cdots & y^{**}_{2,\,n} & y^{**}_{2,\,n+1} & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y^{**}_{3,\,p_1+p_2} & \cdots & y^{**}_{3,\,n} & y^{**}_{3,\,n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y^{**}_{p_1+p_2,\,p_1+p_2} & \cdots & y^{**}_{p_1+p_2,\,n} & y^{**}_{p_1+p_2,\,n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_1 \\ a^*_2 \\ \vdots \\ a^*_n \\ \varepsilon \\ a^*_{n+2} \end{bmatrix} = 0, \\ \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{p_1+p_2-1} (a^*_i)^2}_{\text{grupa I}} + \underbrace{\displaystyle\sum_{i=p_1+p_2}^{n} (a^*_i)^2}_{\text{grupa II}} = 1, \\ \max(\varepsilon). \end{cases}$$

Jeśli punkty $\boldsymbol{y}_i$ dla $i = 1, \dots, p_1+p_2$ nie rozpinają podprzestrzeni $E^{p_1+p_2}$, to wykonane operacje określają wartość czynnika $\varepsilon = 0$. Oznacza to, że wektor $\boldsymbol{a}^*$ istnieje i można go wyznaczyć, stosując np. ortogonalizację Grama–Schmidta. W przeciwnym wypadku wyznaczone z równania macierzowego układu (10) współczynniki a^*_i zapiszemy, używając następującej notacji macierzowej dla przedstawienia iloczynu skalarnego:

$$a_i^* = -[\, a^*_{p_1+p_2}\ a^*_{p_1+p_2+1}\ \dots\ a^*_n\ \varepsilon\,]\boldsymbol{v}_i \quad \text{dla } i = 1,\dots,p_1+p_2-1, \tag{11}$$

gdzie $\boldsymbol{v}_i^T = [y^{**}_{i+1,p_1+p_2}\ \cdots\ y^{**}_{i+1,n}\ y^{**}_{i+1,n+1}]$.

Wykorzystując notację (11), zapisujemy równanie stopnia drugiego z układu (10) w postaci formy kwadratowej następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2} & a^*_{p_1+p_2+1} & \cdots & a^*_n & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & \boldsymbol{S}^{(0)} & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2} \\ a^*_{p_1+p_2+1} \\ \cdots \\ a^*_n \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \tag{12}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{S}^{(0)}$ powstała z podstawienia do równania (10) wyznaczonych dotychczas $p_1p_2 - 1$ pierwszych współczynników a_i^*:

$$\boldsymbol{S}^{(0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\quad \boldsymbol{V} \quad} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots \ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{grupa I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\quad \boldsymbol{I} \quad} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots \ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots \ 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{\text{grupa II}}, \tag{13}$$

gdzie $\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{p_1+p_2-1} \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}$.

Macierz $\boldsymbol{I}$ odpowiada za drugi składnik sumy równania kwadratowego układu (10). Jest to macierz jednostkowa o wymiarach $(n-(p_1+p_2)+1) \times (n-(p_1+p_2)+1)$. Wartość -1 umieszczona w prawym dolnym rogu macierzy będącej drugim składnikiem sumy odpowiada jedynce przeniesionej z prawej na lewą stronę drugiego równania układu (10).

Przedstawiona równoważna postać (12) równania stopnia drugiego z układu (10) umożliwia sprawne potraktowanie tego równania jako równania kwadratowego kolejno z niewiadomą $a^*_{p_1+p_2}, a^*_{p_1+p_2+1}, \dots, a^*_n$, podobnie jak w pierwszej części dowodu.

W kontekście rozwiązywanego równania kwadratowego z niewiadomą $a^*_{p_1+p_2}$ wyodrębnimy w macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$ składniki odpowiadające (szkolnej) postaci równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, którą zapiszemy w postaci formy kwadratowej:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{14}$$

W przypadku, gdy równanie kwadratowe zawiera dodatkowe czynniki z m parametrami M_i dla $(i = 1, \ldots, m)$, w co najwyżej drugiej potędze, formę kwadratową (14) będziemy mogli zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x & M_1 & \ldots & M_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boxed{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}} \\ \boxed{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ M_1 \\ \ldots \\ M_m \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \tag{15}$$

gdzie tylko a pozostaje skalarem, $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ jest wektorem o $m+1$ składowych, a $\boldsymbol{c}$ macierzą o wymiarach $(m+1) \times (m+1)$.

Porównanie struktury równań (12) i (15) pozwala na wyodrębnienie odpowiednich składników w macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$:

$$\boldsymbol{S}^{(0)} = \begin{bmatrix} a^{(0)} & \boxed{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^{(0)\mathrm{T}}} \\ \boxed{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^{(0)}} & \boldsymbol{c}^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Wyróżnik równania kwadratowego (12) z pierwszą niewiadomą $a^*_{p_1+p_2}$ jest równy wyrażeniu, które zapisane jako forma kwadratowa ma następującą postać:

$$\Delta_{a^*_{p_1+p_2}} = \begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2+1} & a^*_{p_1+p_2+2} & \cdots & a^*_n & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ & \boldsymbol{S}^{(1)} & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2+1} \\ a^*_{p_1+p_2+2} \\ \vdots \\ a^*_n \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\boldsymbol{S}^{(1)}$ wyliczono z następującego wzoru dla $i = 1$:

$$\boldsymbol{S}^{(i)} = \boldsymbol{b}^{(i-1)} \boldsymbol{b}^{(i-1)^T} - 4a^{(i-1)} \boldsymbol{c}^{(i-1)} = 4(\boldsymbol{b}^{(i-1)^*} \boldsymbol{b}^{(i-1)^{*T}} - a^{(i-1)} \boldsymbol{c}^{(i-1)}). \tag{17}$$

Przyjmując, że każda z macierzy $\boldsymbol{S}^{(i)}$ ma strukturę macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$ z równania (16), wektor $\boldsymbol{b}^{(i)^*}$ jest określony następująco:

$$\boldsymbol{b}^{(i)^*} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^{(i)}.$$

Macierze $\boldsymbol{S}^{(i)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n - (p_1 + p_2) + 1$ są macierzami o wymiarach $(n - (p_1 + p_2) + 3 - i) \times (n - (p_1 + p_2) + 3 - i)$.

Wyróżnik $\Delta_{a^*_{p_1+p_2}}$ ma być nieujemny, jeśli układ wyjściowy (7) ma mieć tylko jedno rozwiązanie. Nierówność $\Delta_{a^*_{p_1+p_2}} \geq 0$ potraktujemy, tak jak w pierwszej części dowodu, jako nierówności kwadratowe kolejno z niewiadomą $a^*_{p_1+p_2+i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n - (p_1 + p_2)$. Wyróżniki tych nierówności uzyskamy, stosując następujący wzór:

$$\Delta_{a^*_{p_1+p_2+i}} = \begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2+i+1} & \cdots & a^*_n & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{S}^{(i+1)} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{p_1+p_2+i+1} \\ \cdots \\ a^*_n \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Układ wyjściowy (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli wykażemy prawdziwość przedstawionych poniżej dwóch tez, które dotyczą wartości niektórych elementów macierzy $\boldsymbol{S}^{(i)}$ dla $i = 1, \ldots, n-(p_1+p_2)+1$. Prawdziwość tych tez oznaczać będzie, że ostatnia do rozwiązania nierówność mająca postać:

$$\begin{aligned} \Delta_{a^*_n} &= [\,\varepsilon \ \ 1\,][\boldsymbol{S}^{(n-(p_1+p_2)+1)}] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\,\varepsilon \ \ 1\,] \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} = \delta_1 \varepsilon^2 + \delta_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć maksymalną wartość ε, ponieważ δ_1 jest wartością ujemną, natomiast δ_2 jest wartością nieujemną.

TEZA 1. *Współczynniki przy drugiej potędze niewiadomej $a^*_{p_1+p_2+i}$ w kolejno rozwiązywanych nierównościach kwadratowych $\Delta_{a^*_{p_1+p_2+i}} \geq 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n - (p_1 + p_2)$ są ujemne. Innymi słowy, skrajny element $s^{(i+1)}_{1,1}$ macierzy $\boldsymbol{S}^{(i+1)}$ jest ujemny.*

TEZA 2. *Skrajny element $s^{(i+1)}_{z,z}$ macierzy $\boldsymbol{S}^{(i+1)}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n - (p_1 + p_2)$ jest nieujemny. Wartość z wynosi $n - (p_1 + p_2) + 3 - (i + 1)$.*

W dowodach tez (1) i (2) wykorzystamy następujące własności składowych macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$ z równania (13).

WŁASNOŚĆ 1. *Z faktu, że macierz $\boldsymbol{V}$ jest macierzą dodatnio określoną, wynika, że wszystkie minory główne tej macierzy są dodatnie.*

DEFINICJA 1. Niech $\boldsymbol{C}_i$ dla $i = 1, \ldots, (n-1) - (p_1 + p_2) + 2$ będą podmacierzami macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$ uzyskanymi przez skreślenie z niej wszystkich wierszy i kolumn, których indeksy są większe od i.

WŁASNOŚĆ 2. *Dzięki własności* 1 *wszystkie elementy znajdujące na przekątnych macierzy* $\boldsymbol{C}_i$ *dla* $i = 1, \ldots, (n-1) - (p_1 + p_2) + 2$ *są dodatnie.*

WŁASNOŚĆ 3. *Dzięki własności* 1 *i twierdzeniu o wielomianie charakterystycznym, wyznaczniki wszystkich macierzy* $\boldsymbol{C}_i$ *dla* $i = 1, \ldots, n-(p_1+p_2)+2$ *są dodatnie.*

LEMMA 1. *Elementy* $s_{ij}^{(k)}$ *macierzy* $\boldsymbol{S}^{(k)}$ *dla* $k = 1, \ldots, n - (p_1 + p_2) + 1$ *mają wartości określone przez poniższy wzór:*

$$s_{ij}^{(k)} = \Psi_k \det \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\quad \boldsymbol{C}_k \quad} & \begin{matrix} s_{1,j+k}^{(0)} \\ s_{2,j+k}^{(0)} \\ \vdots \\ s_{k,j+k}^{(0)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_{i+k,1}^{(0)} & s_{i+k,2}^{(0)} & \ldots & s_{i+k,k}^{(0)} \end{matrix} & s_{i+k,j+k}^{(0)} \end{array} \right], \tag{20}$$

gdzie $\Psi_k = -4\Psi_{k-1}^2 \det [\boldsymbol{C}_{k-1}]$, *przy* $\Psi_1 = -4$.

Dowód. Prawdziwość lematu 1 wykażemy, stosując indukcję matematyczną. Na podstawie wzoru (17) możemy wyznaczyć wartość każdego elementu $s_{ij}^{(k)}$ macierzy $\boldsymbol{S}^{(k)}$ dla $k = 1, \ldots, n - (p_1 + p_2) + 1$. Uwzględniając, na podstawie struktury macierzy $\boldsymbol{S}^{(k-1)}$, położenie w niej skalara $a^{(k-1)}$, wektora $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{(k-1)}$ i macierzy $\boldsymbol{c}^{(k-1)}$, otrzymujemy następujący wzór:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 4\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^{(k-1)} \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_j^{(k-1)} - a^{(k-1)} \boldsymbol{c}_{i,j}^{(k-1)}\right) \\ &= 4\left(s_{i+1,1}^{(k-1)} s_{1,j+1}^{(k-1)} - s_{1,1}^{(k-1)} s_{i+1,j+1}^{(k-1)}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Korzystając z tego wzoru, sprawdźmy poprawność lematu 1 dla $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= s_{ij}^{(1)} = 4\left(s_{i+1,1}^{(0)} s_{1,j+1}^{(0)} - s_{1,1}^{(0)} s_{i+1,j+1}^{(0)}\right) \\ &= -4 \det \begin{bmatrix} s_{1,1}^{(0)} & s_{1,j+1}^{(0)} \\ s_{i+1,1}^{(0)} & s_{i+1,j+1}^{(0)} \end{bmatrix} \stackrel{(*)}{=} \Psi_1 \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & s_{1,j+1}^{(0)} \\ s_{i+1,1}^{(0)} & s_{i+1,j+1}^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Równość $\stackrel{(*)}{=}$ zachodzi na podstawie definicji macierzy $\boldsymbol{C}_i$ i współczynnika Ψ_i dla $i = 1$.

Zakładamy, że lemat 1 jest prawdziwy dla pewnego m, gdzie $1 < m < n - (p_1 + p_2) + 1$. Obliczając różnicę $\Delta_s = s_{i,j}^{(m+1)} - s_{i,j}^{(m+1)}$, gdzie pierwszy składnik liczony jest ze wzoru podanego w lemacie 1, a drugi z (21), wykażemy, że jest ona równa zero.

$$
\begin{aligned}
\Delta_s &= s_{i,j}^{(m+1)} - s_{i,j}^{(m+1)} \\
&= \Psi_{(m+1)} \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,j+m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_{m+1} & & \vdots \\ & & & s_{m+1,j+m+1}^{(0)} \\ \hline s_{m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{i+m+1,m+1}^{(0)} & s_{i+m+1,j+m+1}^{(0)} \end{array}\right] \\
&\quad - 4\left(s_{i+1,1}^{(m)} s_{1,j+1}^{(m)} - s_{1,1}^{(m)} s_{i+1,j+1}^{(m)}\right) \\
&= -4\Psi_m^2 \det\left[\boldsymbol{C}_m\right] \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,j+m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_{m+1} & & \vdots \\ & & & s_{m+1,j+m+1}^{(0)} \\ \hline s_{i+m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{i+m+1,m+1}^{(0)} & s_{i+m+1,j+m+1}^{(0)} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 4\Psi_m^2 \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s_{m,m+1}^{(0)} \\ \hline s_{i+m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{i+m+1,m}^{(0)} & s_{i+m+1,m+1}^{(0)} \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,j+m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s_{m,j+m+1}^{(0)} \\ \hline s_{m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{m+1,m}^{(0)} & s_{m+1,j+m+1}^{(0)} \end{array}\right] \\
&+ 4\Psi_m^2 \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s_{m,m+1}^{(0)} \\ \hline s_{m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{m+1,m}^{(0)} & s_{m+1,m+1}^{(0)} \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{ccc|c} & & & s_{1,j+m+1}^{(0)} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s_{m,j+m+1}^{(0)} \\ \hline s_{i+m+1,1}^{(0)} & \cdots & s_{i+m+1,m}^{(0)} & s_{i+m+1,j+m+1}^{(0)} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Ponieważ Ψ_m jest z definicji różne od zera, dzielimy otrzymane wyrażenie przez $4\Psi_m^2$. Macierz $\boldsymbol{C}_{m+1}$ przedstawiamy jako macierz zawierającą $\boldsymbol{C}_m$, a z pozostałych wyznaczników, stosując rozwinięcia Laplace'a, usuwamy skrajny, dolny element:

$$\Delta_s = -\det\left[\boldsymbol{C}_m\right]\det\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{1,m+1} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{C}_m} & \vdots & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{m,m+1} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & s^{(0)}_{m+1,m+1} & s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & s^{(0)}_{i+m+1,m+1} & s^{(0)}_{i+m+1,j+m+1} \end{bmatrix}$$

$$-\left(s^{(0)}_{i+m+1,m+1}\det\left[\boldsymbol{C}_m\right] + \det\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{1,m+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{C}_m} & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\cdot\left(s^{(0)}_{m+1,j+m+1}\det\left[\boldsymbol{C}_m\right] + \det\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{C}_m} & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$+\left(s^{(0)}_{m+1,m+1}\det[\boldsymbol{C}_m] + \det\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{1,m+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{C}_m} & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\cdot\left(s^{(0)}_{i+m+1,j+m+1}\det[\boldsymbol{C}_m] + \det\begin{bmatrix} \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\boldsymbol{C}_m} & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Następnie stosujemy rozwinięcie Laplace'a, usuwając skrajny, dolny element macierzy w pierwszym składniku otrzymanego wyrażenia, oraz wymnażamy pozostałe składniki.

$$
\begin{aligned}
\Delta_s = & -s^{(0)}_{i+m+1,j+m+1}\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & s^{(0)}_{m+1,m+1} \end{bmatrix} \\
& -\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & s^{(0)}_{m+1,m+1} & s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & s^{(0)}_{i+m+1,m+1} & 0 \end{bmatrix} \\
& -s^{(0)}_{i+m+1,m+1}s^{(0)}_{m+1,j+m+1}(\det[\boldsymbol{C}_m])^2 \\
& +s^{(0)}_{m+1,m+1}s^{(0)}_{i+m+1,j+m+1}(\det[\boldsymbol{C}_m])^2 \\
& -s^{(0)}_{i+m+1,m+1}\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix} \\
& -s^{(0)}_{m+1,j+m+1}\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
- \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{array}\right] \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{array}\right]
$$

$$
+ s^{(0)}_{i+m+1,j+m+1} \det[\boldsymbol{C}_m] \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{array}\right]
$$

$$
+ s^{(0)}_{m+1,m+1} \det[\boldsymbol{C}_m] \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{array}\right]
$$

$$
+ \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{array}\right] \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ \hline s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{array}\right].
$$

Jeszcze raz stosujemy rozwinięcie Laplace'a, usuwając skrajny, dolny element macierzy w pierwszym składniku otrzymanego wyrażenia. W wyniku tej operacji zaznaczone odpowiednio składniki zredukują się.

$$
\begin{aligned}
\Delta_s = & -\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} & s^{(0)}_{1,j+m+1}\\ \vdots & \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} & s^{(0)}_{m,j+m+1}\end{matrix} \\ \begin{matrix} s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m}\end{matrix} & \begin{matrix} s^{(0)}_{m+1,m+1} & s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,m+1} & 0\end{matrix}\end{bmatrix} \\
& - s^{(0)}_{i+m+1,m+1} s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \left(\det\left[\boldsymbol{C}_m\right]\right)^2 \\
& - s^{(0)}_{i+m+1,m+1} \det\left[\boldsymbol{C}_m\right]\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1}\end{matrix} \\ \begin{matrix} s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m}\end{matrix} & 0\end{bmatrix} \\
& - s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1}\end{matrix} \\ \begin{matrix} s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m}\end{matrix} & 0\end{bmatrix} \\
& - \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1}\end{matrix} \\ \begin{matrix} s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m}\end{matrix} & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\times \det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+\, s^{(0)}_{m+1,m+1} \det[\boldsymbol{C}_m] \det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}.
$$

Ponownie stosujemy rozwinięcie Laplace'a, usuwając element znajdujący się w kolumnie $m+1$ i wierszu $m+1$ z pierwszego nieredukującego się składnika. W wyniku tej operacji zredukują się kolejne składniki.

$$
\Delta_s = -\det[\boldsymbol{C}_m] \det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{m+1,m} & 0 & s^{(0)}_{m+1,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} \ \cdots \ s^{(0)}_{i+m+1,m} & s^{(0)}_{i+m+1,m+1} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
- s^{(0)}_{i+m+1,m+1} s^{(0)}_{m+1,j+m+1} (\det[\boldsymbol{C}_m])^2
$$

$$
- s^{(0)}_{i+m+1,m+1}\det\left[\boldsymbol{C}_m\right]\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{m+1,m} & 0\end{bmatrix}
$$

$$
- s^{(0)}_{m+1,j+m+1}\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0\end{bmatrix}
$$

$$
-\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{m+1,m} & 0\end{bmatrix}
$$

$$
+\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{m+1,m} & 0\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1}\\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1}\end{matrix} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1}\ \cdots\ s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0\end{bmatrix}.
$$

Analogicznie, po raz ostatni stosując rozwinięcie Laplace'a, usuwamy z pierwszego nieznikającego składnika otrzymanego wyrażenia elementy znajdujące się w kolumnie $m+1$ i wierszu $m+2$ oraz w kolumnie $m+2$ i wierszu $m+1$.

$$\Delta_s = -\det[\boldsymbol{C}_m]\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 & 0 \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie w wyniku przeprowadzenia powyższych operacji otrzymamy wyrażenie

$$\Delta_s = -\det\begin{bmatrix} & & & s^{(0)}_{1,m+1} & s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ & \boldsymbol{C}_m & & \vdots & \vdots \\ & & & s^{(0)}_{m,m+1} & s^{(0)}_{m,j+m+1} \\ s^{(0)}_{m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{m+1,m} & 0 & 0 \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} & \cdots & s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 & 0 \end{bmatrix}\det[\boldsymbol{C}_m] \tag{22}$$

$$
-\det \left[\begin{array}{cc} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{s^{(0)}_{i+m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{i+m+1,m} \qquad 0}} \end{array}\right]
$$

$$
+\det \left[\begin{array}{cc} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{m+1,m} & 0 \end{array}\right] \det \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{C}_m & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{s^{(0)}_{i+m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{i+m+1,m} \qquad 0}} \end{array}\right].
$$

Aby każdy ze składników otrzymanego wyrażenia był iloczynem wyznaczników macierzy o wymiarach $(m+1)\times(m+1)$ i $m\times m$, zastosujemy rozwinięcie Laplace'a względem zaznaczonych wierszy.

Najpierw jednak zapiszemy wyrażenie (22), stosując następującą notację: dla każdej macierzy $\boldsymbol{A}$ zapis $\boldsymbol{A}^{c_1,\dots,c_n}_{r_1,\dots,r_n}$ oznaczać będzie macierz powstałą z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez usunięcie z niej wierszy $r_1,\dots,r_n$ i kolumn $c_1,\dots,c_n$.

Definiujemy

$$
\boldsymbol{W} = \left[\begin{array}{ccc} \boxed{\boldsymbol{C}_m} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,m+1} \end{matrix} & \begin{matrix} s^{(0)}_{1,j+m+1} \\ \vdots \\ s^{(0)}_{m,j+m+1} \end{matrix} \\ s^{(0)}_{m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{m+1,m} & 0 & 0 \\ s^{(0)}_{i+m+1,1} \;\cdots\; s^{(0)}_{i+m+1,m} & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{23}
$$

Wówczas

$$
\begin{aligned} \Delta_s = &-\det \boldsymbol{W} \det \boldsymbol{W}^{m+1,m+2}_{m+1,m+2} - \det \boldsymbol{W}^{m+1}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{m+2}_{m+1} \\ &+ \det \boldsymbol{W}^{m+2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{m+1}_{m+1}. \end{aligned} \tag{24}
$$

Po rozwinięciu względem zaznaczonych wierszy i po podzieleniu przez $(-1)^{(m+2+l+1)}$ otrzymamy

$$(25)\qquad \Delta_s = \sum_{l=1}^{m} s^{(0)}_{i+m+1,l}\big(\det \boldsymbol{W}^{l}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{m+1,m+2}_{m+1,m+2} - \det \boldsymbol{W}^{m+1}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+2}_{m+1,m+2} + \det \boldsymbol{W}^{m+2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+1}_{m+1,m+2}\big).$$

Pokażemy, że każdy składnik uzyskanej sumy jest równy zero na mocy tożsamości Schweinsa, na której przydatność w dowodzie zwrócił mi uwagę prof. Stefan Paszkowski, podając niezbędne odwołania do literatury [1], które można znaleźć w odkurzonej postaci w [5].

Tożsamość 1 (Schweinsa).

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Zdefiniujmy

$$(26)\qquad \boldsymbol{W}^* = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \\ b_{n++1} & c_{n++1} & a_{n++1,1} & \cdots & a_{n++1,n-2} & a_{n++1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Tożsamość Schweinsa przyjmuje wówczas postać ($\boldsymbol{W}^*$ jest macierzą $(n+1)\times(n+1)$):

$$(27)\qquad \det \boldsymbol{W}^{*1}_{n+1} \det \boldsymbol{W}^{2,n+1}_{n,n+1} - \det \boldsymbol{W}^{*2}_{n+1} \det \boldsymbol{W}^{*1,n+1}_{n,n+1} + \det \boldsymbol{W}^{*n+1}_{n+1} \det \boldsymbol{W}^{*1,2}_{n,n+1} = 0.$$

Weźmy l-ty składnik sumy określającej Δ_s (25):

$$(28)\qquad s^{(0)}_{i+m+1,l}\big(\det \boldsymbol{W}^{l}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{m+1,m+2}_{m+1,m+2} - \det \boldsymbol{W}^{m+1}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+2}_{m+1,m+2} + \det \boldsymbol{W}^{m+2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+1}_{m+1,m+2}\big).$$

Zdefiniujmy macierz $\boldsymbol{W}^{(l)}$, która powstaje z $\boldsymbol{W}$ przez przestawienie l-tej kolumny na pozycję pierwszej kolumny, a kolumny $m+1$ na pozycję drugiej kolumny. Wówczas możemy zapisać następującą równość:

$$
\begin{aligned}
(29)\quad & s^{(0)}_{i+m+1,l}(\det \boldsymbol{W}^{l}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{m+1,m+2}_{m+1,m+2} - \det \boldsymbol{W}^{m+1}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+2}_{m+1,m+2} \\
& + \det \boldsymbol{W}^{m+2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{l,m+1}_{m+1,m+2}) \\
& = s^{(0)}_{i+m+1,l}(\det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{1}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{2,m+2}_{m+1,m+2} - \det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{1,m+2}_{m+1,m+2} \\
& + \det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{m+2}_{m+2} \det \boldsymbol{W}^{(l)}{}^{1,2}_{m+1,m+2}) \\
& \overset{(*)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Równość $\overset{(*)}{=}$ zachodzi na mocy tożsamości Schweinsa w postaci (27), gdzie $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}^{(l)}$ i $n = m + 1$. Oznacza to, że na mocy twierdzenia o indukcji matematycznej lemat jest prawdziwy dla $k = 1, \ldots, n - (p_1 + p_2) + 1$. ■

Lemat 1 jest wystarczający, by stwierdzić prawdziwość tez 1 i 2.

Wartość elementu $s^{(i+1)}_{1,1}$ macierzy $\boldsymbol{S}^{(i+1)}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n - (p_1 + p_2)$ jest, zgodnie z lematem 1, równa $s^{(i+1)}_{1,1} = \Psi_{i+1} \det \boldsymbol{C}_{i+2}$. Jest więc ujemna na podstawie definicji w tym lemacie współczynnika Ψ_{i+1} i własności 3.

Wartość elementu $s^{(i+1)}_{z,z}$ macierzy $\boldsymbol{S}^{(i+1)}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n - (p_1 + p_2)$, gdzie $z = n - (p_1 + p_2) + 3 - (i + 1)$, jest zgodnie z lematem 1 i wartościami elementów macierzy $\boldsymbol{S}^{(0)}$ ze związku (13) równa

$$
s^{(i+1)}_{z,z} = \Psi_{i+1} \det \begin{bmatrix} \boxed{\quad \boldsymbol{C}_{i+1} \quad} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 \ldots 0 & -1 \end{bmatrix} = -\Psi_{i+1} \det \boldsymbol{C}_{i+1}.
$$

Oznacza to, że $s^{(i+1)}_{z,z}$ jest dodatnie na podstawie definicji w tym lemacie współczynnika Ψ_{i+1} i własności 3.

Prawdziwość tez 1 i 2 oznacza, że ostatnia do rozwiązania nierówność (19) staje się równością, tj. $\Delta_{a^*_n} = 0$, gdy przyjmiemy maksymalną wartość niewiadomej ε. Podobnie jak w pierwszej części dowodu, wobec faktu, że na mocy tezy 1 wszystkie wyróżniki $\Delta^*_{a_{p_1+p_2+i}}$ dla $i = 0, \ldots, n - (p_1 + p_2)$ traktowane jako nierówności kwadratowe na mocy tezy 1 mają ujemne współczynniki przy drugiej potędze niewiadomej $a^*_{p_1+p_2+i}$, oznacza to, że wyjściowy układ równań (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie, co należało wykazać. Kończy to dowód poprawności i wykonalności kroku *p*.4 algorytmu SLS2S.

Literatura

[1] A. C. Aitken, *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, 1951.
[2] D. Cendrowska, *Strict maximum separability of two finite sets, algorithmic approach*, Internat. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2005.
[3] D. Cendrowska, *Konstrukcja klasyfikatora obiektów z wykorzystaniem algorytmu badania rozdzielności liniowej dwóch zbiorów*, Rozprawa doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 2006.
[4] R. O. Duda, P. E. Hart, D. G. Stork, *Pattern Classification*, Wiley Interscience, 1995
[5] S. Paszkowski, *Tożsamości wyznacznikowe i przykłady ich zastosowań*, Mat. Stos. 6 (2005).
[6] B. Russell, *Knowledge and Wisdom*, Portraits from Memory, 1956.

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych
ul. Koszykowa 86
02-008 Warszawa
E-mail: dorota.cendrowska@pjwstk.edu.pl

Abstract. The world needs wisdom as it has never needed it before, and if knowledge continues to increase, the world will need wisdom in the future even more that it does now.this statement by Bertrand Russell was formulated in the middle of the twentieth century. Does it make any sense nowadays? Maybe one could risk saying that it is evergreen. Does it relate to mathematics, computer science or even politics? This paper is at least a partial answer to these questions.
Key words: mathematical skills, piecewise classifiers.

(*wpłynęło 19 czerwca 2006 r.*)