

ROBERT PUSZ (Warszawa)  
TOMASZ ROLSKI (Wrocław)

## Aproksymacje prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela

**Streszczenie.** Celem artykułu jest krytyczne przedstawienie metod pozwalających na obliczanie prawdopodobieństwa niewypłacalności (ang. *insolvability*) portfela. Metody ilustrowane są na przykładzie portfela ubezpieczeń na życie rozpatrywanego w skończonym horyzoncie czasowym. Rozwiązane numerycznie konkretne przykłady pokazują, że korzystanie z popularnych metod, jak centralne twierdzenie graniczne, nie zawsze daje dobre rezultaty. Wytłumaczenie tego faktu można znaleźć na gruncie teorii wielkich odchyłeń, w związku z czym w pracy omówiono możliwości stosowania tej metody. Na koniec porównuje się dwie metody Monte Carlo: prymitywną i losowania istotnościowego.

**1. Wprowadzenie.** W tym artykule dokonujemy przeglądu metod pozwalających na obliczanie prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela. Obliczenia dokładne, nawet jeśli teoretyczne wzory są możliwe do wyprowadzenia, zazwyczaj powodują spore kłopoty obliczeniowe. Rozważymy więc bardzo prosty model portfela składającego się z polis na życie i podamy rozmaite metody obliczenia prawdopodobieństwa niewypłacalności tego portfela w skończonym horyzoncie czasowym. Będą to zarówno metody rekurencyjne, dające teoretycznie wynik dokładny, jak i metody przybliżone, korzystające z nierówności oraz wzorów aproksymacyjnych teorii prawdopodobieństwa. Zostaną też omówione dwie metody Monte Carlo: prymitywna i oparta na metodzie losowania istotnościowego.

W rozdziale 3 niniejszej pracy rozważamy osobno przypadek aproksymacji oraz znalezienia ograniczenia na prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela w ciągu pierwszego roku; przybliżenia tego prawdopodobieństwa w ciągu większej liczby lat omówiono w rozdziale 4. Przypadek pierwszy jest oczywiście prostszy, a więc stwarza większe możliwości analizy. Możemy zatem traktować rozdział 3 niniejszego artykułu jako przegląd możliwych do wykorzystania narzędzi w celu obliczenia szukanego prawdopodobieństwa. Teoria została poparta przykładami, aby pokazać dokładność i łatwość stosowania każdej z metod. W rozdziale 3 znajdziemy między innymi za-

stosowanie następujących twierdzeń: centralnego twierdzenia granicznego, twierdzenia Pietrowa oraz twierdzenia Blackwella–Hodgesa. Ponadto stosując nierówność Chernoffa, otrzymamy ograniczenie szukanego prawdopodobieństwa z góry. Przypadek większej liczby lat jest dużo trudniejszy do analizy. Twierdzenia i metody, które można znaleźć w literaturze, dają mało dokładne przybliżenia i nie są łatwe do implementacji. W artykule stosujemy je głównie w przypadku liczenia niewypłacalności portfela w ciągu dwóch lat, gdyż już na tym etapie używane metody wykazywały dużą niedokładność. W rozdziale 4 do wyznaczenia prawdopodobieństwa niewypłacalności zakładu ubezpieczeń użyto między innymi twierdzenia Cramera o wielkich odchyleniach. W dodatku znajdującym się na końcu artykułu znajdują się dowody twierdzeń z rozdziału 3. Zostały one zamieszczone w celu pokazania, że trudno będzie je rozszerzyć, aby dały się stosować do obliczania prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w dłuższym horyzoncie czasowym.

**2. Model portfela dla  $x$ -latków.** Będziemy rozważać następujący model portfela ubezpieczeń  $n$  polis na całe życie, wystawionych dla  $x$ -latków. Zakładamy, że do grupy nie dołączają nowi uczestnicy w kolejnych latach, a wypadnięcie z grupy następuje tylko w wyniku śmierci. Ubezpieczeni płacą na początku każdego roku życia składkę roczną w wysokości  $c$ . W chwili początkowej portfel ma zabezpieczenie kapitałowe (rezerwę początkową) w wysokości  $u$ . Załóżmy, że odszkodowanie w przypadku śmierci wynosi 1 oraz techniczna stopa procentowa wynosi  $i$ . Interesuje nas znalezienie prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w skończonym horyzoncie czasowym  $k$ . Taki model był przedstawiony w książce [4] w rozdziałach IV.4 i V.3.3. Oznaczmy przez  $\Pi(k, u, n, x)$  prawdopodobieństwo, że portfel, przy rezerwie początkowej  $u$ , składający się z  $n$  polis na całe życie  $x$ -latków, w ciągu  $k$  lat stanie się niewypłacalny. Niech  $q_x$  oznacza prawdopodobieństwo śmierci  $x$ -latka w trakcie pierwszego roku, a  $p_x = 1 - q_x$  prawdopodobieństwo jego przeżycia do końca roku. Dodatkowo wprowadźmy w celu uproszczenia zapisów oznaczenie  ${}_k p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1}$ . Niech zmienna  $\xi_{lj}$  równa się 1, jeśli  $j$ -ty ubezpieczony umrze w  $l$ -tym roku od chwili zawarcia ubezpieczenia, oraz 0 w przeciwnym razie ( $l = 1, \dots, k$ ). Na przykład  $(0, 0, 1, 0)$  oznacza, że w horyzoncie czasowym  $k = 4$  ubezpieczony zmarł w trzecim roku, natomiast  $(0, 0, 0, 0)$  oznacza przeżycie czterech lat od momentu zawarcia ubezpieczenia. Wówczas rozkłady brzegowe zero-jedynkowych zmiennych  $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{kj}$  są następujące:

$$\begin{aligned} \Pr(\xi_{1j} = 1) &= q_x, & \Pr(\xi_{1j} = 0) &= p_x, \\ \Pr(\xi_{2j} = 1) &= p_x q_{x+1}, & \Pr(\xi_{2j} = 0) &= q_x + 2p_x, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

$$\Pr(\xi_{kj} = 1) = {}_{k-1}p_x q_{x+k-1},$$

$$\Pr(\xi_{kj} = 0) = q_x + p_x q_{x+1} + \cdots + {}_{k-2}p_x q_{x+k-2} + {}_k p_x.$$

Wobec tego szukane prawdopodobieństwo możemy zapisać jako prawdopodobieństwo sumy zdarzeń oznaczających niewypłacalność portfela w kolejnych latach. Możemy je więc wyrazić następująco, upraszczając wyrażenia i wstawiając w miejsce  $1 + i$  literę  $r$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \Pi(k, u, n, x) = & \Pr\left(\left\{ur + ncr \leq \sum_{j=1}^n \xi_{1j}\right\}\right. \\ & \cup \left\{ur^2 + nc \frac{r(1-r^2)}{1-r} \leq (r+cr) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right\} \cup \cdots \\ & \cup \left\{ur^k + nc \frac{r(1-r^k)}{1-r} \leq \left(r^{k-1} + c \frac{r(1-r^{k-1})}{1-r}\right) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \cdots \right. \\ & \left. \left. + (r+cr) \sum_{j=1}^n \xi_{(k-1)j} + \sum_{i=1}^n \xi_{kj}\right\}\right). \end{aligned}$$

Powyższe prawdopodobieństwo można obliczyć numerycznie (dokładnie). Przykład algorytmu, który można w tym celu zastosować, znajduje się w podrozdziale 2.1. Niemniej złożoność obliczeń dokładnych jest bardzo duża i w związku z tym interesuje nas, jak ją obniżyć, stosując przybliżenia lub ograniczenia na szukane prawdopodobieństwo; tym zagadnieniom poświęcono rozdziały 3 i 4.

**2.1. Prawdopodobieństwo numeryczne (dokładne).** Wprowadzone prawdopodobieństwo, opisane przez (1), jesteśmy w stanie obliczyć numerycznie, korzystając z następującego algorytmu, pochodzącego z pracy [7]:

1. Niech  $d$  oznacza część całkowitą wyrażenia  $(u + nc)(1 + i)$ .
2. Jeśli  $k = 1$  to

$$\Pi(k, u, n, x) = \sum_{j=d+1}^n \binom{n}{j} q_x^j (1 - q_x)^{n-j}.$$

3. Jeśli  $k > 1$ , to

$$\begin{aligned} \Pi(k, u, n, x) = & \Pi(1, u, n, x) \\ & + \sum_{j=0}^d \binom{n}{j} q_x^j (1 - q_x)^{n-j} \Pi(k-1, (u + nc)(1 + i) - j, n - j, x + 1). \end{aligned}$$

Algorytm ten daje dokładne rezultaty, lecz ze względu na rekurencyjność wzoru i konieczność obliczania symboli Newtona jest mało użyteczny dla dużych  $k$  i  $n$ . Na przykład dla grupy pięćdziesięciosobowej w miarę szybko daje się obliczyć prawdopodobieństwo niewypłacalności najdalej w ciągu 12 lat. Oczywiście jeśli liczba osób ubezpieczonych jest większa (a z tym

trzeba się liczyć w praktyce), to krótszy jest horyzont czasowy, dla którego da się w rozsądnym czasie znaleźć szukane prawdopodobieństwo, a dla odpowiednio dużej liczby osób staje się to niemożliwe. Dobrym rozwiązaniem postawionego problemu wydaje się więc być aproksymacja, ograniczenie lub symulacja szukanego prawdopodobieństwa.

**3. Prawdopodobieństwo niewypłacalności w ciągu pierwszego roku.** Przy założeniach z poprzednich rozdziałów szukane prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela w ciągu pierwszego roku znajdziemy, obliczając

$$(2) \quad H(1, k, n, x) = \Pr\left((u + nc)(1 + i) \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right),$$

gdzie  $\xi_1, \dots, \xi_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, jak  $\xi_{1j}$ .

Na początek rozważmy model uproszczony, zakładając, że kapitał początkowy  $u$  oraz oprocentowanie  $i$  są równe 0. Należy zaznaczyć, że posiadanie nawet niewielkiego kapitału początkowego  $u$  mocno pogarsza dokładność szacowania niewypłacalności portfela, co zobrazujemy przykładem numerycznym pod koniec niniejszego rozdziału. Przy tych założeniach szukane prawdopodobieństwo (2) upraszcza się do następującej postaci:

$$(3) \quad \Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right),$$

gdzie  $\xi_j$  przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem  $q_x$ , jeżeli  $x$ -latek nie dożyje końca roku, oraz wartość 0 z prawdopodobieństwem  $p_x = 1 - q_x$  w przeciwnym przypadku.

**3.1. Zastosowanie nierówności Chernoffa.** W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela (3) można skorzystać z ograniczenia przedstawionego przez Chernoffa w jednym z twierdzeń w pracy [5]; patrz również Asmussen [2]. Poniżej przytaczamy pierwszą część tego twierdzenia.

**TWIERDZENIE 1.** *Jeżeli  $E(X) > -\infty$  oraz  $a \leq E(X)$ , to*

$$\Pr(S_n \leq na) \leq [m(a)]^n,$$

*a jeżeli  $E(X) < \infty$  oraz  $a \geq E(X)$ , to*

$$(4) \quad \Pr(S_n \geq na) \leq [m(a)]^n,$$

*gdzie  $S_n$  jest sumą  $n$  niezależnych zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  oraz*

$$m(a) = \inf_t E(e^{t(X-a)}).$$

Do oszacowania interesującego nas prawdopodobieństwa niewypłacalności (3), jak również do innych aproksymacji będzie wykorzystywana poniższa funkcja tworząca momenty:

$$(5) \quad m_c(h) = Ee^{h(\xi_j - c)}.$$

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że  $E(\xi_j) < c$ . Jest to naturalne założenie w praktyce ubezpieczeń na życie, oznaczające dodatniość współczynnika względnego narzutu bezpieczeństwa. Zauważmy, że wtedy

$$m'_c(0) < 0.$$

Ponadto funkcja (5) jest ściśle wypukła oraz dąży do nieskończoności, gdy  $h \rightarrow \infty$ . Oznacza to, że ma dokładnie jedno minimum dla  $h > 0$ . Zatem po uzgodnieniu oznaczeń, w celu obliczenia szukanego prawdopodobieństwa możemy zastosować nierówność (4) z twierdzenia 1, uzyskując

$$\Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right) \leq m_c^n(h),$$

gdzie

$$(6) \quad m'_c(h) = 0.$$

Przy następującym rozkładzie zmiennych losowych  $\xi_j$ :

$$\Pr(\xi_j = 1) = q_x = 1 - \Pr(\xi_j = 0),$$

gdzie  $q_x$  jest prawdopodobieństwem śmierci  $x$ -latka w ciągu roku, mamy

$$\begin{aligned} m_c(h) &= q_x e^{h(1-c)} + p_x e^{-hc} = q_x \left(\frac{p_x c}{q_x(1-c)}\right)^{1-c} + p_x \left(\frac{p_x c}{q_x(1-c)}\right)^{-c} \\ &= \frac{p_x}{1-c} \left(\frac{p_x c}{q_x(1-c)}\right)^{-c}. \end{aligned}$$

Po przyrównaniu do zera pochodnej  $m'_c(h)$  otrzymujemy wartość parametru  $h$ , dla którego  $m_c(h)$  osiąga infimum:

$$(7) \quad h = \ln \frac{p_x c}{q_x(1-c)}.$$

Uwzględniając powyższe, otrzymujemy

$$(8) \quad \Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right) \leq \left(\frac{p_x}{1-c}\right)^n \left(\frac{cp_x}{(1-c)q_x}\right)^{-nc}.$$

### 3.2. Aproksymacja przy użyciu centralnego twierdzenia granicznego.

W tym podrozdziale w celu przybliżenia szukanego prawdopodobieństwa skorzystamy z centralnego twierdzenia granicznego (CTG), które można znaleźć w książce [12] na str. 220. W dalszej części pracy zobaczymy na przykładach, że stosowanie tego twierdzenia do szacowania prawdopodobieństw niewypłacalności portfela może dawać bardzo niedokładne wyniki.

**TWIERDZENIE 2 (CTG).** *Jeśli  $\{X_n\}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach, mających wartość oczekiwaną  $m$  i wariancję  $\sigma^2 > 0$ , to ciąg losowy  $\{U_n\}$ , gdzie*

$$U_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left( \sum_{k=1}^n X_k - mn \right),$$

*jest zbieżny według dystrybuant do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$ , czyli dla każdego  $u$  zachodzi relacja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(U_n < u) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx.$$

W celu obliczenia prawdopodobieństwa  $\Pr(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j)$  należy od obu stron nierówności odjąć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $\sum_{j=1}^n \xi_j$  i podzielić obie strony nierówności przez pierwiastek z wariancji tej zmiennej. Korzystając z twierdzenia CTG, dostajemy następującą wartość przybliżoną:

$$\Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{n(c - q_x)}{\sqrt{nq_x p_x}}\right),$$

gdzie  $\Phi(\cdot)$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ .

**3.3. Aproksymacja Blackwella i Hodgesa.** W tym podrozdziale przedstawimy „dokładną” wersję aproksymacji Chernoffa, którą jest cytowane poniżej twierdzenie z pracy Blackwella i Hodgesa [3]. Poprawienie aproksymacji polega na pomnożeniu prawej strony nierówności Chernoffa przez pewną stałą zależną od  $n$ , której sposób obliczenia znajduje się w dowodzie poniższego twierdzenia. Tego typu twierdzenia noszą w literaturze nazwę aproksymacji siodłowej (ang. *saddlepoint approximation*); patrz Asmussen [2], str. 357.

**TWIERDZENIE 3.** *Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, przyjmującymi wartości całkowite, dla których funkcja generująca momenty  $E(e^{tX_1})$  jest skończona w pewnym otoczeniu zera. Dla dowolnego  $a$  takiego, że  $E(X_1) < a < \sup X_1$ , niech*

$$m(a) = \min_t E e^{t(X_1 - a)} = \min_t \phi(t, a) = \phi[t^*(a), a]$$

oraz

$$(9) \quad \pi_n^*(a) = \frac{[m(a)]^n}{\sigma\sqrt{2\pi n}}.$$

Wtedy aproksymacja

$$\Pi_n^*(a) = \frac{\pi_n^*(a)}{1 - z}$$

dla  $\Pi_n(a) = \Pr\{X_1 + \dots + X_n \geq na\}$  ma błąd względny rzędu  $n^{-1}$ , gdzie  $z = e^{-t^*(a)}$ .

Dowód twierdzenia 3 wraz z twierdzeniami pomocniczymi i ich dowodami znajduje się w dodatku na końcu artykułu. Twierdzenie 3 znaleźć można również w pracach [2], [9] oraz [11]. Ponadto znajdziemy tam aproksymację szukanego prawdopodobieństwa również przy założeniu, że zmienne  $X_i$  są typu ciągłego.

Poniżej zastosowano twierdzenie 3 w celu oszacowania prawdopodobieństwa (3) (podobnie jak poprzednio przy założeniu, że  $E(\xi_j) < c$  i  $h$  jest rozwiązaniem równania (6)):

$$(10) \quad \Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right) \approx \frac{m_c^n(h)}{(1 - e^{-h})\sigma(h)\sqrt{2\pi n}},$$

gdzie

$$(11) \quad \sigma^2(h) = \frac{m_c''(h)}{m_c(h)}.$$

Rozkład zmiennych  $\xi_j$  jest następujący:

$$\Pr(\xi_j = 1) = q_x = 1 - \Pr(\xi_j = 0),$$

gdzie  $q_x$  jest prawdopodobieństwem śmierci  $x$ -latka w ciągu roku. Przypomnijmy, że wtedy

$$(12) \quad h = \ln \frac{p_x c}{q_x(1 - c)},$$

co po wstawieniu do (5) i (11) daje

$$m_c(h) = \frac{p_x}{1 - c} \left( \frac{p_x c}{q_x(1 - c)} \right)^{-c}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma^2(h) &= \frac{q_x(1 - c)^2 e^{h(1-c)} + p_x c^2 e^{-hc}}{q_x e^{h(1-c)} + p_x e^{-hc}} = \frac{q_x(1 - c)^2 \frac{p_x c}{q_x(1-c)} + p_x c^2}{q_x \frac{p_x c}{q_x(1-c)} + p_x} \\ &= c(1 - c). \end{aligned}$$

Z kolei powyższe dwie zależności po wstawieniu do (10) prowadzą do ostatecznego oszacowania prawdopodobieństwa (3):

$$\Pr\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right) \approx \frac{\left(\frac{p_x}{1-c}\right)^n \left(\frac{cp_x}{(1-c)q_x}\right)^{-nc}}{\frac{c-q_x}{cp_x} \sqrt{(2\pi nc)(1-c)}}.$$

**3.4. Metody Monte Carlo.** W tym podrozdziale w celu oszacowania prawdopodobieństwa (3) metodą symulacji komputerowych zastosujemy dwie metody Monte Carlo. Teorię Monte Carlo i te dwie metody można znaleźć na przykład w skryptach [1] i [14]. Zagadnieniom tym poświęcono również książki [10, 15, 16]. Metody Monte Carlo są eksperymentalnym sposobem obliczania szukanego prawdopodobieństwa  $p = \Pr(\sum_{i=1}^n \xi_j \geq nc)$ , na przykład za pomocą komputera.

Niech  $\eta$  będzie wynikiem eksperymentu losowego (który umiemy przeprowadzić na komputerze) takim, że  $E\eta = \Pr(\sum_{i=1}^n \xi_j \geq nc)$ . Przeprowadzamy  $N$  takich „niezależnych” eksperymentów, których wyniki są opisane przez ciąg  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , i za szukane prawdopodobieństwo przyjmujemy oszacowanie

$$\hat{\eta} = \frac{\sum_{j=1}^N \eta_j}{N}.$$

W przeciwieństwie do szacowań deterministycznych, tutaj dokładność  $\epsilon$  (to znaczy dany błąd bezwzględny) można uzyskać z zadaniem z góry prawdopodobieństwem, powiedzmy  $1 - \delta$ . Stosując centralne twierdzenie graniczne, można oszacować, że liczba prób potrzebnych do uzyskania takiej dokładności wynosi

$$\frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}))^2 \sigma_\eta^2}{\epsilon^2},$$

gdzie  $\sigma_\eta^2$  jest wariancją  $\eta$ . Równoważnie możemy stwierdzić, że błąd w przypadku  $N$  prób jest równy

$$(13) \quad \epsilon = \frac{\Phi^{-1}(1 - \frac{\delta}{2}) \sigma_\eta}{\sqrt{N}}.$$

W praktyce wielkość  $\sigma_\eta$  jest również nieznana i szacuje się ją za pomocą metody Monte Carlo, przyjmując

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\eta_j - \hat{\eta})^2.$$

Zauważmy, że jeśli na przykład zgadzamy się mylić co najwyżej z prawdopodobieństwem  $\delta = 0,1$ , to  $\Phi(0,95) = 1,96$ .

W przypadku *prymitywnej metody Monte Carlo* (ang. *crude Monte Carlo*, CMC) postępujemy następująco. Eksperyment polega na losowaniu  $n$  razy zmiennej o rozkładzie zero-jedynkowym z prawdopodobieństwem sukcesu równym  $q_x$ ; następnie porównujemy sumę tych zmiennych z wartością  $nc$ , wstawiając  $\eta_j = 0$ , jeśli jest ona mniejsza, lub  $\eta_j = 1$  w przeciwnym przypadku. Po przeprowadzeniu takiej symulacji, powiedzmy  $N$  razy, obliczamy średnią uzyskanych wyników, otrzymując aproksymację szukanego prawdopodobieństwa.

Drugą z metod jest tak zwane *losowanie istotnościowe* (ang. *Monte Carlo importance sampling*, MCIS). Od poprzedniej metody różni się tym, że do symulacji bierzemy zmienne po następującej zamianie miary:

$$\frac{dF_h}{dF}(x) = \frac{e^{hx}}{Ee^{h\xi}},$$

gdzie  $h$  jest określone wzorem (12). Otrzymamy wtedy zmienne zero-jedynkowe  $\xi_1, \dots, \xi_n$  z prawdopodobieństwem sukcesu równym  $c$ , a więc z takim



rozkładem losuje się zmienne  $\xi$ . Następnie, jeśli suma tych zmiennych jest mniejsza od  $nc$ , to przyjmujemy  $\eta_j = 0$ , a w przeciwnym przypadku

$$\eta_j = (Ee^{h\xi_j})^n e^{-h\sum_{j=1}^n \xi_j}.$$

Podobnie jak poprzednio, po  $N$  takich symulacjach obliczamy średnią uzyskanych wyników, otrzymując aproksymację szukanego prawdopodobieństwa. Można pokazać (patrz np. [2] lub [14]), że metoda MCIS jest w pewnym sensie optymalna, gdy liczba  $n$  rośnie do nieskończoności. Dodajmy jeszcze, że szacujemy tutaj tak zwane prawdopodobieństwo zdarzenia rzadkiego, tj. bardzo małe. Dlatego są kłopoty z otrzymaniem małego błędu względnego przy stosowaniu intuicyjnie naturalnej metody prymitywnej — ale po wyjaśnieniu odsyłamy do wskazanej literatury.

**3.5. Przykład.** Poniżej przedstawiamy, w formie numerycznej i graficznej, wyniki otrzymane przy szacowaniu prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w ciągu pierwszego roku, stosując wyliczenia dokładne za pomocą algorytmu z podrozdziału 2.1, trzy przedstawione powyżej metody aproksymacji oraz dwie symulacje Monte Carlo. Do obliczeń założono zerową nadwyżkę początkową i brak oprocentowania rocznych składek. Prawdopodobieństwa śmierci w kolejnych latach przyjęto według Polskich Tablic Trwania Życia mężczyzn z roku 1997 (PTTŻ) [13]. Za roczną składkę  $c$  przyjęto aktuarialną wartość rocznej składki w ubezpieczeniu na całe życie skalkulowaną przy stopie procentowej  $i = 4\%$  według następującego wzoru:

$$(14) \quad c = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} v^{s+1} {}_s p_x q_{x+s}}{\sum_{s=0}^{\infty} v^s {}_s p_x},$$

gdzie  $v = (1+i)^{-1}$ . Poniższy przykład został zrealizowany dla grupy liczącej  $n$  mężczyzn w wieku 40 lat, dla których zgodnie z PTTŻ  $q_{40} = 0,00447815$ , a roczna składka na podstawie (14) wynosi  $c = 0,01867836$ . W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń dokładnych oraz aproksymacji uzyskanych na podstawie twierdzeń Blackwella–Hodgesa, CTG i twierdzenia Chernoffa. Natomiast w tabeli 2 zestawiono obliczenia dokładne z rezultatami przeprowadzonych symulacji Monte Carlo i ich błędami bezwzględnymi, zgodnie ze wzorem (13). Liczba symulacji dla każdego  $n$  wynosiła  $N = 10.000$ .

Jak widać z tabeli 1 oraz rysunku 1, korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, szukane prawdopodobieństwo zostało niedoszacowane, w związku z czym nie jest wskazane wykorzystywanie tego sposobu aproksymacji w praktyce. Oszacowanie z góry przy użyciu nierówności Chernoffa jest bardzo niedokładne, niemniej w praktyce z punktu widzenia wypłacalności portfela lepiej mieć niedokładne oszacowanie z góry niż oszacowanie z dołu. Z powyższego przykładu widać, że dobre oszacowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela ubezpieczonych w ciągu pierwszego roku otrzymamy, korzystając z twierdzenia Blackwella–Hodgesa. Oczywiście twierdze-

**Tabela 1.** Zestawienie szukanego prawdopodobieństwa dokładnego oraz jego aproksymacji

$n$	Dokładne	Blackwell–Hodges	CTG	Chernoff
50	0,20101286	0,29096162	0,06630991	0,53320080
100	0,07445716	0,10970123	0,01671969	0,28430309
150	0,03044817	0,04775916	0,00459715	0,15159063
200	0,01301361	0,02205353	0,00131623	0,08082825
250	0,00570497	0,01051753	0,00038596	0,04309769
300	0,00254276	0,00511934	0,00011498	0,02297972
350	0,00114668	0,00252715	0,00003465	0,01225281
400	0,00052164	0,00126045	0,00001053	0,00653321
450	0,00023891	0,00063364	0,00000322	0,00348351
500	0,00011002	0,00032052	0,00000099	0,00185741
550	0,00005088	0,00016295	0,00000031	0,00099037
600	0,00002362	0,00008318	0,00000009	0,00052807
650	0,00001100	0,00004261	0,00000003	0,00028157
700	0,00000514	0,00002190	0,00000001	0,00015013
750	0,00000240	0,00001128	0,00000000	0,00008005
800	0,00000519	0,00000582	0,00000000	0,00004268
850	0,00000244	0,00000301	0,00000000	0,00002276
900	0,00000115	0,00000156	0,00000000	0,00001213
950	0,00000054	0,00000081	0,00000000	0,00000647
1000	0,00000025	0,00000042	0,00000000	0,00000345

nie to możemy znaleźć w tej samej postaci w pracach [9] oraz [11]. Jest ono istotne z punktu widzenia praktyków, ponieważ nie zawsze można znaleźć numerycznie dokładne prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela, np. w przypadku dużej liczby ubezpieczonych.

Z tabeli 2 widać natomiast, że wyznaczanie szukanego prawdopodobieństwa (3) za pomocą symulacji komputerowych metodą CMC daje dużo gorsze rezultaty niż metoda MCIS. Pierwsza z metod daje również większe błędy bezwzględne. Ponadto uzyskane wyniki wskazują, że najlepszą aproksymację szukanego prawdopodobieństwa uzyskano, stosując metodę MCIS. W przypadku dużego  $n$  i długiego horyzontu czasowego metoda MCIS może się okazać jedyną metodą możliwą do zastosowania.

**3.6. Model z nadwyżką i oprocentowaniem.** W tym podrozdziale rozpatrzmy szacowanie prawdopodobieństwa określonego wzorem (2). Jest to pełny model w przypadku jednowymiarowym. W tym celu zastosujemy twierdzenie 4, będące wersją twierdzenia z pracy [11] dla dyskretnych zmiennych losowych.

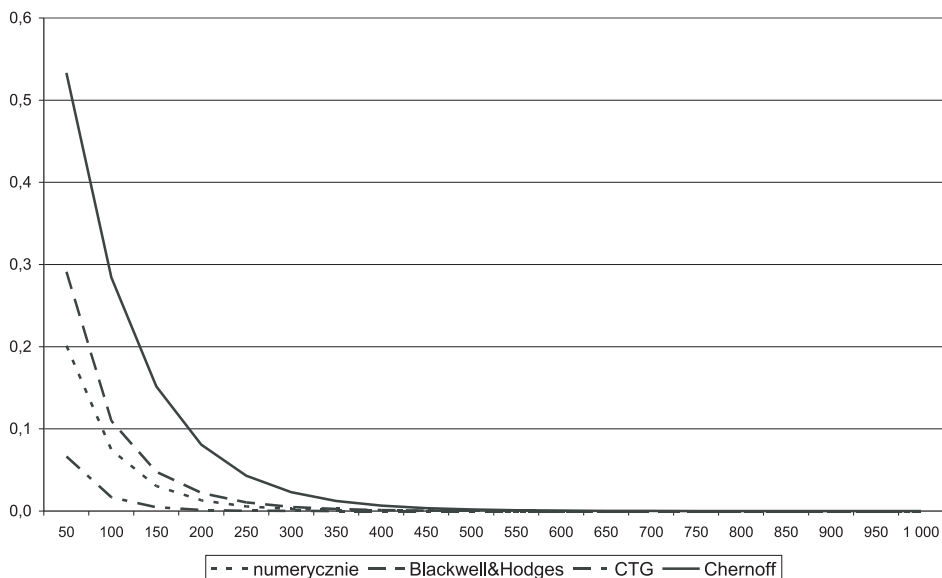
**TWIERDZENIE 4.** Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą dyskretnymi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, dla których funkcja generująca momenty  $E(e^{tX_1})$  jest skończona w pewnym otoczeniu 0. Weźmy dowolne  $c$  takie, że  $E(X_1) < c < \sup X_1$ , oraz funkcję  $\delta(n)$  spełniającą  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0$ .

**Tabela 2.** Zestawienie szukanego prawdopodobieństwa dokładnego oraz jego symulacji za pomocą metod Monte Carlo

$n$	Dokładne	CMC	$\epsilon$	MCIS	$\epsilon$
50	0,20101286	0,19790000	0,00780935	0,20404228	0,00435150
100	0,07445716	0,07530000	0,00517220	0,07533253	0,00196972
150	0,03044817	0,03360000	0,00353204	0,02998792	0,00089304
200	0,01301361	0,01290000	0,00221184	0,01324852	0,00041937
250	0,00570497	0,00470000	0,00134061	0,00566862	0,00019348
300	0,00254276	0,00300000	0,00107198	0,00248685	0,00009023
350	0,00114668	0,00080000	0,00055418	0,00112477	0,00004259
400	0,00052164	0,00060000	0,00047998	0,00051880	0,00002031
450	0,00023891	0,00030000	0,00033945	0,00023815	0,00000963
500	0,00011002	0,00020000	0,00027717	0,00011237	0,00000460
550	0,00005088	0,00000000	0,00000000	0,00004991	0,00000216
600	0,00002362	0,00000000	0,00000000	0,00002344	0,00000103
650	0,00001100	0,00000000	0,00000000	0,00001126	0,00000050
700	0,00000514	0,00000000	0,00000000	0,00000511	0,00000023
750	0,00000240	0,00000000	0,00000000	0,00000241	0,00000011
800	0,00000519	0,00000000	0,00000000	0,00000524	0,00000024
850	0,00000244	0,00000000	0,00000000	0,00000238	0,00000011
900	0,00000115	0,00000000	0,00000000	0,00000112	0,00000005
950	0,00000054	0,00000000	0,00000000	0,00000054	0,00000003
1000	0,00000025	0,00000000	0,00000000	0,00000026	0,00000001

**Tabela 3.** Zestawienie szukanego prawdopodobieństwa oraz jego aproksymacji w modelu z nadwyżką

$n$	num ( $u = 0,3$ )	aprosk ( $u = 0,3$ )	num ( $u = 0,6$ )	aprosk ( $u = 0,6$ )
50	0,02130884	0,44851738	0,02130884	0,69138998
100	0,01051595	0,16910440	0,01051595	0,26067461
150	0,00485338	0,07362070	0,00485338	0,11348638
200	0,00222030	0,03399548	0,00222030	0,05240407
250	0,00570497	0,01621276	0,00101704	0,02499198
300	0,00254276	0,00789145	0,00046750	0,01216468
350	0,00114668	0,00389560	0,00021570	0,00600507
400	0,00052164	0,00194298	0,00009988	0,00299511
450	0,00023891	0,00097675	0,00004639	0,00150566
500	0,00011002	0,00049408	0,00011002	0,00076162
550	0,00005088	0,00025118	0,00005088	0,00038720
600	0,00002362	0,00012823	0,00002362	0,00019766
650	0,00001100	0,00006569	0,00001100	0,00010126
700	0,00000514	0,00003375	0,00000514	0,00005203
750	0,00000240	0,00001739	0,00000240	0,00002680
800	0,00000113	0,00000898	0,00000113	0,00001384
850	0,00000053	0,00000464	0,00000053	0,00000716
900	0,00000025	0,00000241	0,00000025	0,00000371
950	0,00000012	0,00000125	0,00000012	0,00000192
1000	0,00000025	0,00000065	0,00000006	0,00000100



Rys. 1. Zestawienie szukanego prawdopodobieństwa dokładnego oraz jego aproksymacji

Dodatkowo niech  $m_c(h) = Ee^{h(X_1-c)}$  i  $\sigma^2(h) = m_c''(h)/m_c(h)$ , gdzie  $h$  jest rozwiązaniem równania  $m_c'(h) = 0$ . Wtedy

$$\Pr(X_1 + \dots + X_n \geq n(c + \alpha_n)) = \frac{m_{c+\alpha_n}^n(h) \exp\left\{-\frac{n\alpha_n^2}{2\sigma^2(h)}(1 + O(|\alpha_n|))\right\} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}(1 - e^{-h})}$$

dla  $|\alpha_n| \leq \delta(n)$ .

W celu znalezienia oszacowania prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w modelu z nadwyżką początkową oraz oprocentowaniem

$$\Pr\left((u + nc)(1 + i) \leq \sum_{j=1}^n \xi_j\right)$$

należy skorzystać z twierdzenia 4, przyjmując  $\alpha_n = u/n$  oraz wstawiając  $c(1 + i)$  w miejsce  $c$ . W tabeli 3 zestawiono wyniki dokładne oraz uzyskane dzięki powyższemu twierdzeniu przy założeniu, że nadwyżka początkowa jest równa 0,3 lub 0,6, a oprocentowanie jest równe 0.

Z tabeli widać, że im większa jest nadwyżka początkowa, tym bardziej rozbieżne są wartości szacunków od rzeczywistych wartości znalezionych numerycznie. W związku z tym dla odpowiednio dużych  $u$  używanie prawdopodobieństw przybliżonych wydaje się nie mieć sensu.

**4. Prawdopodobieństwo niewypłacalności w czasie dłuższym niż rok.** Zaczniemy od horyzontu czasowego  $k = 2$ . Niech jak poprzednio  $\xi_{1j}$  będzie zmienną losową przyjmującą dwie wartości, w zależności od tego, czy ubezpieczony  $x$ -latek przeżyje pierwszy rok (nie dokonamy wypłaty), czy w nim umrze (dokonamy wypłaty):

$$\Pr(\xi_{1j} = 1) = q_x, \quad \Pr(\xi_{1j} = 0) = p_x, \quad p_x + q_x = 1.$$

Określmy teraz zmienną zero-jedynkową  $\xi_{2j}$  jako zmienną zależną od  $\xi_{1j}$  i opisującą przeżycie (niedokonanie wypłaty) lub śmierć (dokonanie wypłaty)  $x$ -latka w drugim roku ubezpieczenia:

$$\Pr(\xi_{2j} = 0 \mid \xi_{1j} = 0) = p_{x+1}, \quad \Pr(\xi_{2j} = 1 \mid \xi_{1j} = 0) = q_{x+1},$$

oraz

$$\Pr(\xi_{2j} = 0 \mid \xi_{1j} = 1) = 1, \quad \Pr(\xi_{2j} = 1 \mid \xi_{1j} = 1) = 0.$$

Daje nam to następujący rozkład zmiennej  $\xi_{2j}$ :

$$\Pr(\xi_{2i} = 0) = p_x p_{x+1} + q_x, \quad \Pr(\xi_{2j} = 1) = p_x q_{x+1}.$$

Prawdopodobieństwo, że portfel będzie niewypłacalny w ciągu dwóch lat, możemy teraz określić w następujący sposób:

$$(15) \quad \Pr\left(\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_{1j}\right) \cup \left(nc - \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \left(n - \sum_{j=1}^n \xi_{1j}\right)c \leq \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right)\right),$$

co po uproszczeniu daje

$$\Pr\left(\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right) \cup \left(2nc \leq (1+c) \sum_{j=1}^n \xi_{2j} + \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right)\right).$$

Aby znaleźć aproksymację prawdopodobieństwa (15), skorzystamy z twierdzenia Cramera (patrz [6]).

Gdyby szukane przez nas prawdopodobieństwo wyrazić w terminach tego twierdzenia, to szukalibyśmy następującej wartości:

$$\Pr\left(\left(\sum_{j=1}^n \xi_{1j}, \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right) \in n\Gamma_2\right),$$

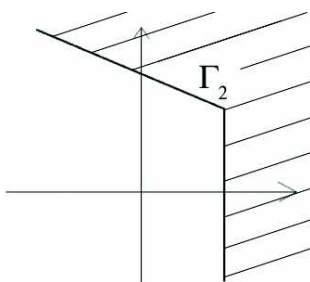
gdzie  $\Gamma_2$  jest obszarem przedstawionym na rysunku 2, a wyznaczonym przez warunki zawarte w prawdopodobieństwie (15).

Aby zastosować powyższe twierdzenie do rozwiązania postawionego problemu, musimy znaleźć wartość

$$J = \min_{x,y} \max_{h_1, h_2} f_{h_1, h_2}(x, y),$$

gdzie

$$f_{h_1, h_2}(x, y) = xh_1 + yh_2 - \log Ee^{h_1\xi_{1j} + h_2\xi_{2j}}.$$



Rys. 2. Obszar Gamma

Biorąc pod uwagę rozkład zmiennych  $\xi_{1j}, \xi_{2j}$ , funkcję  $f_{h_1, h_2}(x, y)$  możemy zapisać w następujący sposób:

$$f_{h_1, h_2}(x, y) = xh_1 + yh_2 - \log(p_x p_{x+1} + q_x e^{h_1} + p_x q_{x+1} e^{h_2}).$$

W celu znalezienia  $J$  musimy teraz znaleźć maksimum funkcji  $f_{h_1, h_2}(x, y)$ , obliczając jej pochodne względem  $h_1$  i  $h_2$ , a następnie przyrównując je do zera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h_1} &= x - \frac{q_x e^{h_1}}{p_x p_{x+1} + p_x q_{x+1} e^{h_2} + q_x e^{h_1}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial h_2} &= y - \frac{p_x q_{x+1} e^{h_2}}{p_x p_{x+1} + p_x q_{x+1} e^{h_2} + q_x e^{h_1}} = 0. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania dostajemy

$$e^{h_1} = \frac{x}{1-x} \frac{p_x p_{x+1} + p_x q_{x+1} e^{h_2}}{q_x},$$

a z drugiego

$$e^{h_1} = \frac{1-y}{y} \frac{p_x q_{x+1}}{q_x} e^{h_2} - \frac{p_x p_{x+1}}{q_x}.$$

Po porównaniu otrzymujemy

$$h_2 = \log\left(\frac{p_{x+1}}{q_{x+1}} \frac{y}{1-x-y}\right), \quad h_1 = \log\left(\frac{p_x p_{x+1}}{q_x} \frac{x}{1-x-y}\right).$$

W punktach tych funkcja  $f_{h_1, h_2}(x, y)$  przyjmuje maksimum i jest ono równe

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \log\left(\frac{p_x p_{x+1}}{q_x} \frac{x}{1-x-y}\right) \\ &+ y \log\left(\frac{p_{x+1}}{q_{x+1}} \frac{y}{1-x-y}\right) - \log\left(\frac{p_x p_{x+1}}{1-x-y}\right). \end{aligned}$$

Następnie szukamy minimum funkcji  $f(x, y)$  na zbiorze  $\Gamma$ . Po obliczeniu pochodnych po  $x$  i  $y$  oraz przyrównaniu ich do zera mamy

$$\frac{p_x p_{x+1}}{q_x} = \frac{1-x-y}{x}, \quad \frac{p_{x+1}}{q_{x+1}} = \frac{1-x-y}{y},$$

co po rozwiązaniu daje

$$x = q_x, \quad y = p_x q_{x+1}.$$

W tak wyznaczonym punkcie wypukła funkcja  $f(x, y)$  przyjmuje minimum. Niemniej punkt ten znajduje się poza obszarem  $\Gamma_2$ . W związku z tym minimum funkcji  $f(x, y)$  w obszarze  $\Gamma_2$  będzie osiągnięte na jego brzegu. Niestety nie da się jednoznacznie ustalić, na której z półprostych wyznaczających brzeg obszaru  $\Gamma_2$  przyjmowana jest najmniejsza wartość funkcji  $f(x, y)$ , czyli  $J$  — trzeba to sprawdzać numerycznie. Plusem tej metody jest to, że dostajemy oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny nawet dla dużych  $n$ , czego nie jesteśmy w stanie uzyskać, stosując obliczenia dokładne.

Tak jak poprzednio, obliczenia zostały wykonane dla grupy składającej się z  $n$  osób w wieku 40 lat, dla których coroczna składka wynosi  $c = 0,01867836$  oraz  $q_x = 0,00447815$  i  $q_{x+1} = 0,00491500$  (dane z [13]). Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że  $\min_{x,y} f(x, y)$ , które jest wartością  $J$ , wynosi  $0,01257715$ . W tym miejscu należy zauważyć, że wartość ta osiągnięta jest w punkcie leżącym na brzegu obszaru wyznaczonego przez nierówność  $x \geq c$ . Punkt ten ma następujące współrzędne:

$$x = c, \quad y = (1 - c)q_{x+1}.$$

Mając daną wartość  $J$ , możemy aproksymować szukane prawdopodobieństwo w następujący sposób:

$$\Pr\left(\left(\sum_{j=1}^n \xi_{1j}, \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right) \in n\Gamma_2\right) \leq e^{-nJ} \approx e^{-0,01257715n}.$$

Nie jest jasne, czy w tym wypadku oszacowanie to będzie górnym ograniczeniem, jak w przypadku twierdzenia Chernoffa, chociaż nasz eksperyment obliczeniowy sugerowałby prawdziwość tej hipotezy.

**UWAGA 1.** Należy zauważyć, że twierdzenie Cramera w jednym wymiarze daje aproksymację będącą odpowiednikiem górnego ograniczenia w twierdzeniu Chernoffa. Aby uzyskać przejście od jednego twierdzenia do drugiego, należałoby przyjąć

$$f(x) = -\ln m_c(h)$$

i szukać minimum funkcji  $f(x)$  w zbiorze  $x \geq c$ .

**UWAGA 2.** Najmniejsza wartość funkcji  $f$  jest taka sama w jednym i w dwóch wymiarach. Dla grupy 40-latków, o której mowa powyżej, jest to wartość  $0,01257715$ . Wartość ta w obu przypadkach jest przyjmowana na brzegu obszaru wyznaczonego tym samym warunkiem  $x \geq c$ . W przypadku jednego wymiaru jest to półprosta, a w przypadku dwóch wymiarów półpłaszczyzna. W jednym wymiarze powyższa wartość jest przyjmowana w punkcie  $x = c$ , a w dwóch wymiarach w punkcie  $(c, (1 - c)q_{x+1})$ .

W tabeli 4 zestawiono obliczenia dokładne z aproksymacją dla prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w ciągu dwóch pierwszych lat, osiągniętą z użyciem twierdzenia Cramera.

**Tabela 4.** Prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela w ciągu dwóch lat

n	Dokładne	Cramer
50	0,22124183	0,53320061
100	0,07922857	0,28430289
150	0,03155613	0,15159048
200	0,01327254	0,08082814
250	0,00576592	0,04309761
300	0,00255720	0,02297967
350	0,00116085	0,01225278
400	0,00052607	0,00653319
450	0,00023996	0,00348350
500	0,00011026	0,00185740
550	0,00005094	0,00099037
600	0,00002364	0,00052807
650	0,00001100	0,00028156
700	0,00000514	0,00015013
750	0,00000240	0,00008005
800	0,00000519	0,00004268
850	0,00000244	0,00002276
900	0,00000115	0,00001213
950	0,00000054	0,00000647
1000	0,00000025	0,00000345

Z tabeli widzimy, że oszacowanie to nie jest zbyt dokładne, a dodatkową jego wadą jest brak uwzględnienia nadwyżki początkowej  $u$ . Oczywiście w dłuższym horyzoncie czasowym oszacowania będą jeszcze gorsze, niemniej przedstawimy, jak wygląda problem w wielu wymiarach.

Podobnie, korzystając z teorii wielkich odchyień, proponujemy szacować prawdopodobieństwo niewypłacalności w ciągu  $k$  lat. Prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela w ciągu  $k$  lat określone jest wzorem (1). W tym podrozdziale zajmijmy się jego uproszczoną wersją, zakładając, że nie ma nadwyżki początkowej  $u$  oraz oprocentowania  $i$ . Szukane prawdopodobieństwo przyjmuje więc następującą postać:

$$(16) \quad \Pr\left\{\left(nc \leq \sum_{j=1}^n \xi_{1j}\right) \cup \left(2nc \leq (1+c) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\right) \cup \dots \cup \left(knc \leq (1+(k-1)c) \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + \dots + (1+c) \sum_{j=1}^n \xi_{(k-1)j} + \sum_{i=1}^n \xi_{kj}\right)\right\}.$$



Wówczas prawdopodobieństwo wyrażone przez (16) można oszacować przez

$$\Pr\left(\left(\sum_{j=1}^n \xi_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n \xi_{kj}\right) \in n\Gamma_k\right) \approx e^{-nJ},$$

gdzie

$$J = \min_{x_1, \dots, x_k} \max_{h_1, \dots, h_k} f_{h_1, \dots, h_k}(x_1, \dots, x_k),$$

$$f_{h_1, \dots, h_k}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k x_j h_j - \log E e^{\sum_{j=1}^k h_j \xi_j},$$

a obszar  $\Gamma_k$  jest wyznaczony przez warunki zawarte w prawdopodobieństwie (16).

Podamy teraz kilka uwag, jak obliczyć  $J$ . W tym celu trzeba wyznaczyć wartość

$$J = \min_{x_1, \dots, x_k} \max_{h_1, \dots, h_k} f_{h_1, \dots, h_k}(x_1, \dots, x_k).$$

Dla zmiennych  $\xi_j$  określonych powyżej,

$$(17) \quad f_{h_1, \dots, h_k}(x_1, \dots, x_k) = x_1 h_1 + \dots + x_k h_k - \ln(p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} + q_x e^{h_1} + p_x q_{x+1} e^{h_2} + \dots + p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-2} q_{x+k-1} e^{h_k}).$$

Funkcja ta przyjmuje maksimum dla

$$h_1 = \ln\left(\frac{p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k-1}}{q_x} \frac{x_1}{1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k}\right),$$

$$h_2 = \ln\left(\frac{p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+k-1}}{q_{x+1}} \frac{x_2}{1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k}\right),$$

$$\vdots$$

$$h_k = \ln\left(\frac{p_{x+k-1}}{q_{x+k-1}} \frac{x_k}{1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k}\right).$$

Po podstawieniu do (17) należy znaleźć minimum funkcji  $f(x_1, \dots, x_k)$  w obszarze  $\Gamma_k$  wyznaczonym przez warunki zawarte w prawdopodobieństwie (16). Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym, minimum to wypadnie na brzegu obszaru. Gdyby, jak poprzednio, najmniejsza wartość wypadła na części brzegu obszaru określonego warunkiem  $x_1 \geq c$ , to punkt, w którym zostanie ona osiągnięta, będzie miał następujące współrzędne:

$$x_1 = c,$$

$$x_2 = (1 - c)q_{x+1},$$

$$\vdots$$

$$x_k = (1 - c)p_{x+1}p_{x+2} \cdots p_{x+k-2}q_{x+k-1}.$$

**5. Podsumowanie.** Z powyższych rozważań widać, że właściwie każde z przedstawionych rozwiązań ma swoje wady i zalety. Liczenie numeryczne powoduje problemy dla dużej liczby ryzyk, ale daje dokładne rezultaty nawet na kilka lat naprzód. Używanie aproksymacji Blackwella–Hodgesa dla przybliżania prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w ciągu pierwszego roku jest dobre dla dużej liczby ubezpieczonych, ale jeżeli w modelu występuje nadwyżka kapitału, to oszacowania mocno odbiegają od rzeczywistości. Do aproksymacji prawdopodobieństwa niewypłacalności portfela w ciągu kilku lat mamy właściwie tylko aproksymację w twierdzeniu Cramera i ewentualnie ograniczenia górne o postaci zbliżonej do postaci występującej w twierdzeniu Cramera. Dają one niezbyt dobre oszacowania, nie uwzględniają nadwyżki początkowej, a w dodatku szukanie wartości najmniejszych w mało regularnych obszarach może nastroczać wiele trudności. Wydaje się, że nie da się poprawić aproksymacji szukanego prawdopodobieństwa, stosując wartość  $e^{-nJ}$  pomnożoną przez pewną stałą, ale być może daje się je poprawić, wykorzystując inną postać.

**6. Dodatek.** Podamy teraz wraz z dowodami dwa twierdzenia, potrzebne do dowodu twierdzenia 4.

**TWIERDZENIE 5.** *Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą dyskretnymi niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, dla których funkcja generująca momenty  $E(e^{tX_1})$  jest skończona w pewnym otoczeniu zera. Dla dowolnego  $a$  takiego, że  $E(X_1) < a < \sup X_1$ , niech*

$$m(a) = \min_t Ee^{t(X_1-a)} = \min_t \phi(t, a) = \phi[t^*(a), a]$$

*oraz niech  $Y_1, Y_2, \dots$  będą dyskretnymi niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie*

$$\Pr\{Y_1 = x\} = \Pr\{X_1 = x\} \frac{\exp[t^*(a)(x-a)]}{m(a)}$$

*dla wszystkich  $x$ . Wtedy dla wszystkich  $n$ ,*

$$\Pr\{X_1 + \dots + X_n = na\} = [m(a)]^n \Pr\{Y_1 + \dots + Y_n = na\}.$$

**TWIERDZENIE 6.** *Jeśli  $X_1, X_2, \dots$  są zmiennymi przyjmującymi wartości całkowite i spełniającymi założenia twierdzenia 5, to aproksymacja*

$$\pi_n^*(a) = \frac{[m(a)]^n}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

*dla  $\pi_n(a) = \Pr\{X_1 + \dots + X_n = na\}$  ma błąd względny rzędu  $n^{-1}$ .*

*Dowód twierdzenia 5.*  $\phi(t, a)$  jest dla każdego  $a$  ściśle wypukłą funkcją zmiennej  $t$  i osiąga minimum dla  $t = t^*(a)$ . Oznaczmy  $p(x) = \Pr\{X_1 = x\}$ .

Mamy  $\phi(a, t) = \sum_x p(x)e^{t(x-a)}$ , a więc

$$\phi_2[a, t^*(a)] = \sum_x (x-a)p(x)e^{t^*(a)(x-a)} = 0,$$

gdzie  $\phi_i$  oznacza pochodną  $\phi$  względem  $i$ -tego argumentu. Wprowadźmy oznaczenie

$$q(x) = \frac{p(x)e^{t^*(a)(x-a)}}{m(a)}.$$

Wtedy  $q(x)$  jest dyskretną funkcją prawdopodobieństwa, a średnią rozkładu  $q$  jest  $a$ . Niech  $Y_1, Y_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $q$  i niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będzie ciągiem liczb, których sumą jest  $na$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \Pr\{(Y_1, \dots, Y_n) = (x_1, \dots, x_n)\} &= q(x_1) \cdots q(x_n) \\ &= p(x_1) \cdots p(x_n) \frac{e^{t^*(a)(x_1 + \cdots + x_n - na)}}{[m(a)]^n} \\ &= \frac{\Pr\{(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\}}{[m(a)]^n}. \end{aligned}$$

Sumując po wszystkich ciągach  $(x_1, \dots, x_n)$  takich, że  $x_1 + \cdots + x_n = na$ , dostaniemy tezę twierdzenia. ■

*Dowód twierdzenia 6.* Jeśli zmienna losowa  $U$  o funkcji charakterystycznej  $\eta$  przyjmuje tylko wartości całkowite, to

$$\Pr(U = u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itu} \eta(t) dt.$$

Ponieważ zmienna losowa  $Y_1 + \cdots + Y_n$  jest tego typu, mamy

$$\Pr(Y_1 + \cdots + Y_n = na) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itna} \zeta^n(t) dt,$$

gdzie  $\zeta(t)$  jest funkcją charakterystyczną zmiennej  $Y$  oraz  $na$  jest liczbą całkowitą. Jeśli zapiszemy  $\psi(t) = e^{-ita}\zeta(t)$  dla funkcji charakterystycznej zmiennej  $Y - a$ , dostaniemy  $\Pr(Y_1 + \cdots + Y_n = na) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi^n(t) dt$ . Obliczmy najpierw tę całkę w przedziale  $|t| \leq (\log n)/\sqrt{n}$ . Jeśli rozwiniemy  $\log \psi(t)$  w terminach kumulant  $\kappa_r$  zmiennej  $Y_1 - a$ , zaobserwujemy, że  $\kappa_1 = 0$ , i przyjmijmy  $\kappa_2 = \sigma^2$ , wówczas

$$\psi^n(t) = e^{-n\sigma^2 t^2/2} \exp \left\{ n \sum_{r=3}^6 \frac{\kappa_r (it)^r}{r!} + o(n^{-2}) \right\}$$

dla  $|t| \leq (\log n)/\sqrt{n}$ . Transformacja  $\sqrt{n}\sigma t = u$  i seria rozwinięć drugiego składnika daje

$$(18) \quad e^{-u^2/2} \left\{ 1 - \frac{i\kappa_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

dla  $|u| \leq \sigma \log n$ . Korzystając z faktu, że

$$(19) \quad \int_{-\sigma \log n}^{\sigma \log n} u^p e^{-u^2/2} du = 2^{(p+1)/2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) + o(n^{-2}),$$

gdy  $p$  jest nieparzyste, i znika, gdy  $p$  jest parzyste, znajdujemy

$$(20) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\log n \sqrt{n}}^{\log n \sqrt{n}} \psi^n(t) dt = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi n}} (1 + o(n^{-1})).$$

Przechodząc do przedziału  $(\log n)/\sqrt{n} \leq |t| \leq \pi$ , pokażemy, że ta część całki jest nieistotna. Ponieważ  $\kappa_1 = 0$  i  $0 < \sigma^2 < \infty$ , możemy znaleźć  $0 < t_0 < \pi$  takie, że  $|\psi(t)| \leq 1 - \sigma^2 t^2/3$  dla  $|t| \leq t_0$ . Stąd w przedziale  $(\log n)/\sqrt{n} \leq |t| \leq t_0$  mamy

$$\left| \int \psi^n(t) \right| \leq 2 \int_{(\log n)/\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\sigma^2 t^2/3} dt,$$

co równa się  $o(n^{-k})$  dla wszystkich  $k$ . Dla przedziału  $t_0 \leq |t| \leq \pi$  odnotujmy najpierw, że z naszego założenia o tym, że możliwe wartości  $X_1$  są liczbami całkowitymi z maksymalnym skokiem równym 1, wynika, że dla  $0 < |t| \leq \pi$  nigdy wszystkie punkty  $e^{itx}$  nie mogą być zbieżne i stąd  $\sum_x q(x)e^{itx}$  leży w środku koła jednostkowego. Stąd

$$|\psi(t)| = \left| e^{-ita} \sum_x q(x)e^{itx} \right| < 1 \quad \text{dla } t_0 \leq |t| \leq \pi,$$

i ze względu na ciągłość  $\psi$  istnieje  $\rho < 1$ , dla którego  $|\psi(t)| < \rho$  w zakresie, dla którego  $\int \psi^n(t) dt = o(\rho^n)$ . Teraz możemy wziąć prawą stronę (20) jako wyrażenie na  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi^n(t) dt$ , i stąd na

$$\Pr(Y_1 + \dots + Y_n = na).$$

Ten fakt w połączeniu z twierdzeniem 5 dowodzi twierdzenia 6. ■

*Dowód twierdzenia 3.* Łatwa modyfikacja twierdzenia 5 pokazuje, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$ ,

$$\pi(k) = \Pr(X_1 + \dots + X_n = na + k) = [m(a)]^n e^{-kt^*} \Pr(Y_1 + \dots + Y_n = na + k),$$

podczas gdy dowód twierdzenia 6 daje

$$\Pr(Y_1 + \dots + Y_n = na + k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \psi^n(t) dt.$$

Sumowanie względem  $k$  daje

$$\Pi_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \pi(k) = \frac{[m(a)]^n}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{-K(it+t^*)}}{1 - e^{-(it+t^*)}} \psi^n(t) dt.$$

Ze względu na ograniczoność funkcji podcałkowej możemy przejść do granicy pod całką, otrzymując

$$(21) \quad \Pi_n = \frac{[m(a)]^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}} \psi^n(t) dt,$$

gdzie  $z = e^{-t^*} < 1$ . Rozwiązanie tej całki jest podobne jak w dowodzie twierdzenia 6. Ponieważ  $1/(1 - ze^{-it})$  jest ograniczone, całka po zbiorze  $|t| \geq (\log n)/\sqrt{n}$  jest zaniedbywalna jak poprzednio. Znowu dokonujemy podstawienia  $\sqrt{n}\sigma t = u$  i znajdujemy, że dla  $u \leq \sigma \log n$ ,

$$\frac{1}{1 - ze^{-it}} = \frac{1}{1 - z} - \frac{izu}{\sigma(1 - z)^2\sqrt{n}} + o(n^{-1}).$$

Łącząc to z (18) i całkując różne wyrażenia z użyciem (19), znajdujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}} \psi^n(t) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{1 - z} \left( 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

W połączeniu z (21) kończy to dowód twierdzenia 3. ■

*Dowód twierdzenia 4.* Dowód tego twierdzenia został oparty na dowodzie twierdzenia znajdującego się w pracy Pietrowa [11], dotyczącego przypadku ciągłego. Na początek wprowadźmy zmienne pomocnicze. Niech  $R(h) = Ee^{hX_1}$  oraz  $f(h) = R'(h)/R(h)$ . Zauważmy, że warunek  $m'_c(h) = 0$  jest tożsamy z warunkiem  $f(h) = c$ . Przyjmijmy dodatkowo  $f(h_n) = c + \alpha_n$ . Wobec tego  $h = f^{-1}(c)$  i  $h_n = f^{-1}(c + \alpha_n)$ , gdzie  $f^{-1}$  jest funkcją odwrotną do  $f$ . Po rozwinięciu funkcji  $h_n$  otrzymamy

$$h_n = f^{-1}(c) + \alpha_n \frac{df^{-1}(u)}{du} \Big|_{u=c} + \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{d^2 f^{-1}(u)}{du^2} \Big|_{u=c} + O(|\alpha_n|^3),$$

czyli

$$h_n - h = \frac{\alpha_n}{\frac{df(h)}{dh}} + O(\alpha_n^2) = \frac{\alpha_n}{\sigma^2(h)} + O(\alpha_n^2).$$

Następnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ln R(h_n) - h_n m(h_n) &= \ln R(h) + m(h)(h_n - h) + \frac{\sigma^2(h)}{2} (h_n - h)^2 \\ &\quad + O(|h_n - h|^3) - \left( h + \frac{\alpha_n}{\sigma^2(h)} + O(\alpha_n^2) \right) (c + \alpha_n) \\ &= \ln R(h) - h(c + \alpha_n) - \frac{\alpha_n^2}{2\sigma^2(h)} (1 + O(|\alpha_n|)). \end{aligned}$$

Jest oczywiste, że  $h_n = h(1 + o(1))$  oraz  $\sigma(h_n) = \sigma(h)(1 + o(1))$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Korzystając z twierdzenia 3, uzyskujemy

$$\Pr(X_1 + \dots + X_n \geq n(c + \alpha_n)) = \frac{1}{(1 - e^{-h})\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \\ \times \exp \left\{ n \left[ \ln R(h) - h(c + \alpha_n) - \frac{\alpha_n^2}{2\sigma^2(h)} (1 + O(|\alpha_n|)) \right] \right\} \left( 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Po uzgodnieniu oznaczeń dostaniemy tezę twierdzenia. ■

### Literatura

- [1] S. Asmussen, *Stochastic simulation with a view towards stochastic processes*, 1999.
- [2] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer, 2003.
- [3] D. Blackwell, J. L. Hodges, *The probability in the extreme tail of a convolution*, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 1113–1120.
- [4] B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa, 2004.
- [5] H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 493–507.
- [6] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett, Boston, 1993.
- [7] E. Frostig, S. Haberman, B. Levikson, *Generalized life insurance: ruin probabilities*, Scand. Actuarial J. 2003, 2, 136–152.
- [8] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.
- [9] J. L. Jensen, *Saddlepoint Approximations*, Oxford, 1995.
- [10] N. Madras, *Lectures on Monte Carlo Methods*, AMS, Providence, 2002.
- [11] V. V. Petrov, *On the probabilities of large deviations for sums of independent random variables*, Teoriya Veroyatnost. Primien. 10 (1965), 310–322.
- [12] A. Plucińska, E. Pluciński, *Probabilistyka*, 2000, 220–221.
- [13] *Polskie Tablice Trwania Życia*,  
<http://www.stat.gov.pl/serwis/nieregularne/trwanie/index.htm>.
- [14] T. Rolski, *Twisting in applied probability*,  
<http://math.uni.wroc.pl/~rolski/publications.html>.
- [15] S. M. Ross, *A Course in Simulation*, Macmillan, New York, 1991.
- [16] R. Zieliński, *Metody Monte Carlo*, WNT, Warszawa, 1970.

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych  
Politechnika Warszawska  
pl. Politechniki 1  
00-661 Warszawa  
E-mail: ropusz@poczta.onet.pl

Instytut Matematyczny  
Uniwersytet Wrocławski  
pl. Grunwaldzki 2/4  
50-384 Wrocław