MATEMATYKA STOSOWANA 6, 2005

Stefan Paszkowski (Wrocław)

Tożsamości wyznacznikowe i przykłady ich zastosowań

Streszczenie. W pracy podano i udowodniono kilka mniej znanych tożsamości wyznacznikowych: Jacobiego (§ 4), wyrażenia dla wyznacznika iloczynu macierzy, w tym wzór Bineta–Cauchy'ego (§ 5), tożsamości Sylvestera (§ 6) i Schweinsa (§ 7). Centralną rolę odgrywają różne warianty tożsamości Sylvestera. Przytoczono kilka przykładów jej zastosowań w analizie numerycznej. W niektórych dowodach korzysta się z dopełnienia Schura (§ 3) — pojęcia ostatnio szeroko badanego i stosowanego.

Słowa kluczowe: tożsamości wyznacznikowe Jacobiego, Sylvestera i Schweinsa, wzór Bineta–Cauchy'ego, dopełnienie Schura.

1. Wstęp. W podręczniku Mostowskiego i Starka [16], z którego przed półwieczem korzystali studenci, rozdział IV jest poświęcony wyznacznikom. Główne wyniki tam podane to ogólne twierdzenie Laplace'a i twierdzenie Cauchy'ego. To pierwsze orzeka, że wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy sumie wszystkich iloczynów MM^*, gdzie dla ustalonych wierszy (lub kolumn) M jest dowolnym minorem utworzonym z ich elementów, a M^* jego dopełnieniem algebraicznym. Tamże można znaleźć wzór Cramera wyrażający składowe rozwiązania układu równań liniowych w postaci ilorazu wyznaczników, ale i ostrzeżenie, że dla dużych układów ten wzór jest skrajnie nieefektywny, bo to samo można powiedzieć o zastosowaniu wzoru Laplace'a, nawet w najprostszej wersji opisującej rozwinięcie wyznacznika względem elementów jego wiersza lub kolumny.

Jak się wydaje, i teraz student któregolwiek z kierunków ścisłych i technicznych dowiaduje się o wyznacznikach niewiele więcej, wobec czego może wątpić, czy są one potrzebne. Okazuje się jednak, że już w XIX wieku udowodniono takie własności wyznaczników — niestety pomijane w programach studiów — które pozwalają budować efektywne metody numeryczne lub otrzymywać ważne wyniki teoretyczne. Historię tych odkryć opisał Muir w czterotomowej monografii [18] uzupełnionej w [19] o lata 1900–1920. Lektura tych książek nie jest łatwa, gdyż autor cytuje *in extenso* duże fragmenty oryginalnych prac, oczywiście w języku oryginału i zachowując stosowaną tam symbolikę, często bardzo osobliwą. Można tam jednak znaleźć wiele ciekawostek, w tym polonica. Oto przykład: M. A. Baraniecki w 1878 r. wydał w Paryżu 600-stronicowy podręcznik *Teorya wyznaczników* (*determinantów*). *Kurs uniwersytecki.* Muir chwali tę książkę i pisze, że „for Polish students unfamiliar with other languages the handsome volume must be a most useful repository" ([18], t. III, s. 75). Wielokrotnie jest cytowany Hoene-Wroński; o osobliwościach jego stylu świadczy choćby takie zdanie Muira: „In 1810 Wronski presented to the Institute of France a memoir on the so-called *Technie de l'Algorithmie*, which with his usual sanguine enthusiasm he viewed as the essential part of a new branch of Mathematics".

Celem tej pracy jest przypomnienie kilku mniej popularnych tożsamości wyznacznikowych. Ich wybór był nieco subiektywny, ale nie mogło w tym wyborze zabraknąć tożsamości Sylvestera — a właściwie całej rodziny jego wyników — bo te są najczęściej cytowane. Podano więc przykłady ich zastosowań. W innych przypadkach interesujące jest powiązanie podanych tożsamości z bardziej znanymi. Praca [8], z której zaczerpnięto pewne istotne informacje, zawiera inne jeszcze klasyczne twierdzenia, w tym Muira; ich sformułowanie wymagałoby jednak wprowadzenia wielu dodatkowych pojęć.

2. Oznaczenia. Aby ułatwić lekturę dalszego ciągu pracy, warto wyjaśnić, jakie oznaczenia będą tam używane. Macierz prostokątna A *rozmiaru* $m \times n$ ma z definicji m wierszy i n kolumn. Jej elementy, którymi są liczby zespolone bądź rzeczywiste, oznaczamy $(A)_{ij}$. Jeśli $m = n$, to jest to macierz *kwadratowa* stopnia n. Wyznacznik macierzy kwadratowej A oznaczamy symbolem $|A|$ (nie będzie on nigdzie oznaczał wartości bezwzględnej liczby). Dla danej macierzy będziemy często rozważać jej fragmenty. Symbol $A[p_1, \ldots, p_l \,|\, s_1, \ldots, s_m]$ oznacza macierz rozmiaru $l \times m$ złożoną z elementów znajdujących się w macierzy A na przecięciu jej wierszy o wskaźnikach $p_1, \ldots, p_l$ i kolumn o wskaźnikach $s_1, \ldots, s_m$. Natomiast symbol $A_{p_1,\ldots,p_l;\, s_1,\ldots,s_m}$ ma w pewnym sensie przeciwne znaczenie: jest to podmacierz powstała z A przez wykreślenie z niej wierszy o wskaźnikach $p_1, \ldots, p_l$ i kolumn o wskaźnikach $s_1, \ldots, s_m$. Ta symbolika pozwala wyrazić w zwarty sposób ważny *wzór Laplace'a* (potrzebny również w tej pracy), który opisuje rozwinięcie wyznacznika macierzy A stopnia n względem k wybranych wierszy ($1 \leqslant k < n$) o wskaźnikach $i_1, i_2, \ldots, i_k$, gdzie $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$:

$$\tag{2.1} |A| = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n} (-1)^{\sum_h (i_h + j_h)} \cdot |A[i_1, i_2, \ldots, i_k \,|\, j_1, j_2, \ldots, j_k]|\, |A_{i_1,i_2,\ldots,i_k;\, j_1,j_2,\ldots,j_k}|.$$

Wzór dla rozwinięcia względem k wybranych kolumn o wskaźnikach j_h różni się od powyższego tylko tym, że w sumie uwzględniamy wszystkie i_h takie, że $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Innym ważnym pojęciem (które pojawia się już w pracy Sylvestera z roku 1851) jest macierz *blokowa*. Ściślej, jest to zwykła macierz podzielona liniami poziomymi i pionowymi na podmacierze (*bloki*):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{lm} \end{bmatrix}.$$

Bloki o tym samym pierwszym (drugim) wskaźniku mają tę samą liczbę wierszy (kolumn). Jeśli $l = m$, a bloki A_{ii} są kwadratowe, to macierz A jest kwadratowa. Jeśli dodatkowo wszystkie bloki A_{ij} dla $i < j$ ($i > j$) są macierzami zerowymi, czyli A jest macierzą *blokową trójkątną dolną* (*górną*), to

$$|A| = |A_{11}|\,|A_{22}| \dots |A_{mm}|. \tag{2.2}$$

Ta własność wynika łatwo ze wspomnianego już twierdzenia Laplace'a. Wiele działań na macierzach blokowych wykonuje się tak, jakby bloki były liczbami.

3. Dopełnienie Schura. Rozważmy najpierw układ dwóch równań liniowych

$$bx + cy = f,$$
$$dx + ey = g.$$

Standardowa metoda jego rozwiązania może zaczynać się od eliminacji niewiadomej x z drugiego równania (co pozwoli wyznaczyć y). W tym celu odejmujemy od niego pierwsze równanie pomnożone przez db^{-1}:

$$(e - db^{-1}c)y = g - db^{-1}f. \tag{3.1}$$

Rozważmy z kolei macierz A stopnia n podzieloną na bloki:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Zakładamy, że blok B jest macierzą kwadratową nieosobliwą stopnia k, gdzie $1 \leqslant k < n$ (co już wyznacza rozmiary pozostałych trzech bloków). Wtedy

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -DB^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & E - DB^{-1}C \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

I jest tu macierzą jednostkową stopnia podanego we wskaźniku, a 0 – macierzą zerową. Zauważmy podobieństwo bloku kwadratowego $E - DB^{-1}C$ do współczynnika $e - db^{-1}c$ w (3.1). Nie jest ono czysto formalne, bo mnożenie w (3.3) wiąże się z eliminacją Gaussa stosowaną w rozwiązywaniu układów równań liniowych.

Macierz $E - DB^{-1}C$ nazywamy *dopełnieniem Schura* bloku B macierzy A i oznaczamy symbolem $[A/B]$ (jest też stosowany symbol A/B). Mamy prawo użyć tu wzoru (2.2), który daje ważną równość

$$|A| = |B|\,|[A/B]|. \tag{3.4}$$

Definicja dopełnienia Schura pozostaje poprawna, gdy macierz A nie jest kwadratowa. W ten sam sposób można określić to dopełnienie dla każdego z bloków C, D, E, jeśli tylko jest on kwadratowy i nieosobliwy. W każdym przypadku otrzymujemy równość podobną do (3.4):

$$\begin{aligned} [A/C] &:= D - EC^{-1}B, & |A| &= -|C|\,|[A/C]|, \\ [A/D] &:= C - BD^{-1}E, & |A| &= -|D|\,|[A/D]|, \\ [A/E] &:= B - CE^{-1}D, & |A| &= |E|\,|[A/E]|. \end{aligned}$$

Określone wyżej pojęcie pochodzi z pracy Schura [23], a przyjętą teraz nazwę wprowadził dopiero w 1968 r. Haynsworth; jeszcze np. Gantmacher w [12], s. 45, pisze nieco enigmatycznie o *wzorach Schura* (typu (3.4)), ale nie cytuje jego prac. Jak przypuszczają autorzy pracy [8], tytuł artykułu Schura niezwiązany z wyznacznikami był powodem pominięcia go przez Muira w [19] i [20] (oni też piszą, że to samo pojęcie pojawiło się w pracy Banachiewicza [2], który najpewniej nie znał wyników Schura).

Dopełnienie Schura jest coraz częściej i szerzej stosowane. W [8] są zacytowane trzy prace z obszerną bibliografią dotyczącą tych zastosowań (np. w statystyce), a w druku jest książka, której rozdział 7 autorstwa Brezinskiego [6] dotyczy zastosowań numerycznych. Tu jednak dopełnienie Schura określono tylko ze względu na tożsamość (3.4), która — jak pokazano w [8] — pozwala udowodnić w stosunkowo prosty i jednolity sposób wiele znalezionych wcześniej tożsamości wyznacznikowych. Niżej podane dowody tożsamości Jacobiego, Bineta–Cauchy'ego i Sylvestera są w ogólnych zarysach takie jak w [8]. Te trzy tożsamości, a także tożsamość Schweinsa, pochodzą z epoki „przedschurowskiej” i oczywiście ich autorzy stosowali inne metody dowodu. Dla wygody czytelników uwzględniono w bibliografii m.in. te dawne prace (cytowane w [8], najpewniej za [18], i kilka innych), do których i tu wypada się odwołać.

4. Tożsamość Jacobiego. Wróćmy do równości (3.3), w której po lewej stronie drugim czynnikiem jest macierz A kwadratowa, stopnia n. Załóżmy dodatkowo, że jest ona nieosobliwa. Wobec (3.4) jest to równoważne nieosobliwości dopełnienia Schura $[A/B]$. Pomnóżmy obie strony (3.3) z lewej przez macierz blokową

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C[A/B]^{-1} \\ 0 & [A/B]^{-1} \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że daje to równość

$$\begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}C[A/B]^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}C[A/B]^{-1} \\ -[A/B]^{-1}DB^{-1} & [A/B]^{-1} \end{bmatrix} A = I.$$

Wobec tego macierz $[\ldots]$ po lewej stronie jest macierzą odwrotną A^{-1}, a jej fragmentem jest $[A/B]^{-1}$:

$$[A/B]^{-1} = A^{-1}[k+1, k+2, \ldots, n \,|\, k+1, k+2, \ldots, n].$$

Jest też oczywiste, że $B = A[1, 2, \ldots, k \,|\, 1, 2, \ldots, k]$. Pamiętajmy też, że dla dowolnej macierzy nieosobliwej G zachodzi równość $|G|\,|G^{-1}| = 1$ (twierdzenie Cauchy'ego). Biorąc to wszystko pod uwagę, możemy napisać (3.4) w postaci

$$|A| = \frac{|A[1, 2, \ldots, k \,|\, 1, 2, \ldots, k]|}{|A^{-1}[k+1, k+2, \ldots, n \,|\, k+1, k+2, \ldots, n]|}.$$

Wyróżnienie początkowych k wierszy i kolumn macierzy A nie jest tu istotne. Przestawiając odpowiednio wiersze i kolumny, wykazujemy, że — ogólniej —

$$|(A^{-1})_{i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k}| = \frac{(-1)^{\sum (i_h + j_h)} |A[i_1, i_2, \ldots, i_k \,|\, j_1, j_2, \ldots, j_k]|}{|A|},$$

gdzie $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$. Jest to właśnie *tożsamość Jacobiego* z 1841 r.; zob. [15]. Warto jeszcze zauważyć, że w szczególnym przypadku $k = n - 1$ jest ona dobrze znana. Istotnie, niech l (odpowiednio, m) będzie jedyną z liczb $1, 2, \ldots, n$ nieobecną w układzie $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ (odpowiednio, w $j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}$). Wtedy lewa strona tożsamości Jacobiego jest po prostu elementem $(A^{-1})_{lm}$ macierzy A^{-1}, a prawa strona jest równa $(-1)^{l+m}|A_{l;\,m}|/|A|$, czyli mamy tu dobrze znane wyrażenie elementów macierzy odwrotnej (zob. np. [16], s. 197).

5. Wyznacznik iloczynu macierzy. Jeśli w (3.2) przy założeniach z § 3 mamy dodatkowo $B = -I_k$, $E = 0$, to dopełnienie Schura $[A/B]$ jest równe DC i z (3.4) wynika, że $|A| = (-1)^n |DC|$. Pamiętajmy, że C i D są macierzami prostokątnymi, odpowiednio rozmiaru $k \times l$ i $l \times k$, gdzie $l := n - k$, a zarazem blokami macierzy A. Iloczyn DC jest macierzą kwadratową stopnia l. Dzięki szczególnej postaci bloków B i E wzór Laplace'a (2.1) dla $|A|$ upraszcza się tak, że występują w nim wyłącznie macierze C i D oraz ich fragmenty. Aby podkreślić analogię do następnego wzoru, zmieniamy symbole D, k, l odpowiednio na B, m, n:

$$|BC| = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant m} |B[1, 2, \ldots, n \,|\, i_1, i_2, \ldots, i_n]| \cdot |C[i_1, i_2, \ldots, i_n \,|\, 1, 2, \ldots, n]| \quad (m \geqslant n).$$

Autorzy pracy [8] nazywają tę równość *wzorem Bineta–Cauchy'ego* i cytują oryginalne prace [4] z 1812 r. i [9] z 1815 r. W [16], s. 124, użyto określenia *uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego*; samo twierdzenie dotyczy przypadku $m = n$, gdy wzór upraszcza się do postaci $|BC| = |B|\,|C|$.

Inny wzór dla wyznacznika iloczynu macierzy kwadratowych B i C podał Sylvester w [27], a wcześniej, w szczególnym przypadku, w [25]. Ten iloczyn wyraża się przez wyznaczniki „mieszane", tj. takie, że w każdym występują elementy obu macierzy. Zaczynamy od macierzy A rozmiaru $n \times (2n)$, o elementach a_{ij}. Niech B i C będą jej blokami kwadratowymi stopnia n, złożonymi z elementów a_{ij} takich, że odpowiednio $1 \leqslant j \leqslant n$ i $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$. Niech liczba naturalna p spełnia warunek $p < n$. Według Muira ([20], s. 120) najprostszą metodą dowodu zapowiedzianego wzoru jest rozważenie następującego wyznacznika stopnia $2n$:

$$(5.1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+p} & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+p} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & a_{1,n+p+1} & \dots & a_{1,2n} \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & a_{n,n+p+1} & \dots & a_{n,2n} \end{vmatrix}$$

(wyżej go nieco zmodyfikowano). Jeśli od jego wierszy od $(n+1)$-go do $2n$-tego odejmiemy odpowiednio wiersze od pierwszego do n-tego, to otrzymamy wyznacznik mający w lewym dolnym rogu blok $n \times n$ zer, a po jego prawej stronie blok $n \times p$ o elementach $-a_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ n+1 \leqslant j \leqslant n+p)$. Z (2.2) wynika, że powyższy wyznacznik jest równy

$$(5.2)\qquad (-1)^p |A[1,2,\dots,n \,|\, 1,2,\dots,n]| \\ \cdot\ |A[1,2,\dots,n \,|\, n+1,n+2,\dots,2n]| = (-1)^p |B|\,|C|.$$

Inne wyrażenie otrzymamy, stosując do tegoż wyznacznika twierdzenie Laplace'a. Minory utworzone z elementów jego początkowych n wierszy mnożymy przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne. Ponieważ wyznacznik (5.1) zawiera dwa bloki zer, więc te minory nie znikają co najwyżej wtedy, gdy nie zawierają elementów ostatnich $n-p$ kolumn, a dopełnienia algebraiczne — gdy nie zawierają elementów kolumn od $(n+1)$-szej do $(n+p)$-tej. Dlatego wystarczy uwzględnić minory

$$|A[1,2,\dots,n \,|\, j_1, j_2, \dots, j_{n-p}, n+1, n+2, \dots, n+p]|$$

dla dowolnych j_h takich, że $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-p} \leqslant n$. Niech dla ustalonych j_h wskaźniki $i_1, i_2, \dots, i_p$ będą takie, że $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ oraz

$$\{1,2,\dots,n\} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{n-p}\}.$$

Wtedy na mocy twierdzenia Laplace'a wartością wyznacznika (5.1) jest suma

$$(5.3)\qquad \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_{n-p}\leqslant n} (-1)^{1+2+\ldots+(n+p)+\sum j_h}$$
$$\cdot\, |A[1,2,\ldots,n\,|\,j_1,j_2,\ldots,j_{n-p},n+1,n+2,\ldots,n+p]|$$
$$\cdot\, |A[1,2,\ldots,n\,|\,i_1,i_2,\ldots,i_p,n+p+1,n+p+2,\ldots,2n]|,$$

która — jak już wspomniano — jest równa (5.2). Jeśli B_k jest k-tą kolumną macierzy B i podobne znaczenie ma C_k, to w tej sumie występują wyznaczniki o kolumnach

$$B_{j_1},B_{j_2},\ldots,B_{j_{n-p}},C_1,C_2,\ldots,C_p,\quad B_{i_1},B_{i_2},\ldots,B_{i_p},C_{p+1},C_{p+2},\ldots,C_n.$$

Dla konkretnych, niewielkich n i p tożsamość wynikająca z przyrównania dwóch wyrażeń wyznacznika (5.1) była znana wcześniej. W szczególności w 1779 r. Bézout [3] udowodnił tożsamość mającą w oryginalnych oznaczeniach postać

$$|ab'c''|\,|de'f''|-|ab'd''|\,|ce'f''|+|ac'd''|\,|be'f''|-|bc'd''|\,|ae'f''|=0.$$

Twierdzenie Sylvestera daje to samo dla $n=3$ i $p=1$. Należy przyjąć, że w (5.3) pierwszy iloczyn zawiera wyznaczniki macierzy B i C stopnia trzeciego. Wtedy w trzech następnych iloczynach pierwszy czynnik zawiera dwie kolumny z B i jedną z C, a drugi odwrotnie.

6. Tożsamość Sylvestera. Powróćmy do przekształceń macierzy kwadratowej

$$A=\begin{bmatrix} B & C\\ D & E\end{bmatrix}\qquad (B \text{ — blok kwadratowy stopnia } k)$$

opisanych w § 3. Jej zmiana na prawą stronę tożsamości (3.3), czyli na

$$\begin{bmatrix} B & C\\ 0 & E-DB^{-1}C\end{bmatrix},$$

polega na dodaniu do $n-k$ końcowych wierszy macierzy A kombinacji k początkowych wierszy. Takie przekształcenie nie zmienia wyznacznika podmacierzy

$$A[1,2,\ldots,k,i\,|\,1,2,\ldots,k,j]\qquad (k<i\leqslant n,\ k<j\leqslant n).$$

Jest on zatem równy wyznacznikowi macierzy

$$\begin{bmatrix} B & 0\\ 0 & ([A/B])_{i-k,j-k}\end{bmatrix}.$$

Stąd

$$|A[1,\ldots,k,i\,|\,1,\ldots,k,j]|=|B|([A/B])_{i-j,k-j}.$$

Niech F będzie macierzą stopnia $n-k$ o elementach występujących tu po lewej stronie. Mamy zatem

$$F = |B|[A/B],$$

skąd $|F| = |B|^{n-k}|[A/B]|$. Uwzględniając jeszcze (3.4), wnioskujemy, że

$$|F| = |A|\,|B|^{n-k-1}. \tag{6.1}$$

Jest to *tożsamość Sylvestera* z 1851 r.; zob. [26], [8], skąd pochodzi powyższy dowód, a także [12], s. 34. Jednak Muir w [20], s. 189–190, formułuje wynik Sylvestera ogólniej. Niech mianowicie dla k i l naturalnych i takich, że $k+l \leqslant n$, macierz F stopnia $\binom{n-k}{l}$ ma elementy

$$|A[1,2,\ldots,k,i_1,i_2,\ldots,i_l\,|\,1,\ldots,k,j_1,j_2,\ldots,j_l]|,$$

gdzie $k < i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant n$, $k < j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leqslant n$; takim układom $(i_1,i_2,\ldots,i_l)$, $(j_1,j_2,\ldots,j_l)$ branym w porządku leksykograficznym odpowiadają kolejne wiersze i kolumny macierzy F. W (6.1) jest oczywiście $l = 1$. Teraz zaś zamiast (6.1) zachodzi równość

$$|F| = |A|^{\binom{n-k-1}{l-1}}|B|^{\binom{n-k-1}{l}}$$

(jeśli np. $n \geqslant 4$, $k = n-3$ i $l = 2$, to $|F| = |A|^2|B|$).

Tożsamość Sylvestera można uogólniać na wiele sposobów; zob. [5], [13] i [17], gdzie opisano zastosowania tych uogólnień. Z drugiej strony, w wielu pracach tożsamością Sylvestera nazywa się tylko jej najprostszy przypadek (6.2) wynikający z (6.1) dla $k = n-2$ i łatwiejszy do udowodnienia (zob. np. [1], cz. I, s. 23–24). Wtedy

$$F = \begin{bmatrix} |A_{n;\,n}| & |A_{n;\,n-1}| \\ |A_{n-1;\,n}| & |A_{n-1;\,n-1}| \end{bmatrix}$$

i z (6.1) wynika, że

$$|A_{n-1;\,n-1}|\,|A_{n;\,n}| - |A_{n-1;\,n}|\,|A_{n;\,n-1}| = |A_{n-1,n;\,n-1,n}|\,|A|.$$

Są tu wyróżnione dwa ostatnie wiersze i dwie ostatnie kolumny macierzy A. Nie jest to jednak konieczne. Dla dowolnych liczb naturalnych p, q, s, t takich, że $p < q \leqslant n$ i $s < t \leqslant n$, jest prawdziwa tożsamość

$$|A_{p;\,s}|\,|A_{q;\,t}| - |A_{p;\,t}|\,|A_{q;\,s}| = |A_{p,q;\,s,t}|\,|A|. \tag{6.2}$$

Wynika ona z poprzedniej przez odpowiednie przestawienia wierszy i kolumn dzięki znanej elementarnej własności wyznaczników.

Tożsamość Sylvestera (6.2) jest użyteczna wtedy, gdy wszystkie występujące w niej wyznaczniki mają (dla pewnych p, q, s, t) tę samą strukturę. Dotyczy to w szczególności wyznaczników Toeplitza, a także *wyznaczników*

Hankela

$$C(l\,/\,m) := \begin{vmatrix} c_{l-m+1} & c_{l-m+2} & \cdots & c_l \\ c_{l-m+2} & c_{l-m+3} & \cdots & c_{l+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_l & c_{l+1} & \cdots & c_{l+m-1} \end{vmatrix} \qquad (m > 0).$$

Dodatkowo przyjmuje się, że $C(l\,/\,0) := 1$. Niech c_k dla $k \geqslant 0$ będzie tu współczynnikiem szeregu potęgowego

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{6.3}$$

i przyjmijmy $c_k := 0$ dla $k < 0$. Wtedy wyznacznik $C(l\,/\,m)$ odgrywa istotną rolę w *aproksymacji Padégo* ([1], cz. I i II). Jest to dział teorii aproksymacji zajmujący się metodami konstrukcji i własnościami *przybliżeń Padégo*

$$[l\,/\,m]_f(z) := \frac{P_{lm}(z)}{Q_{lm}(z)}.$$

Dla danych liczb całkowitych nieujemnych l i m takie przybliżenie jest z definicji funkcją wymierną o następujących własnościach:

$$\partial P_{lm} \leqslant l, \quad \partial Q_{lm} \leqslant m \qquad (\partial \text{ – stopień wielomianu}),$$
$$Q_{lm}(0) \neq 0, \quad \frac{P_{lm}(z)}{Q_{lm}(z)} - f(z) = \mathrm{O}(z^{l+m+1}).$$

Ta funkcja istnieje i jest taka, że $\partial P_{lm} = l$ i $\partial Q_{lm} = m$, wtedy i tylko wtedy, gdy $C(l\,/\,m) \neq 0$; już to pokazuje znaczenie tych wyznaczników. Spełniają one pewną tożsamość wynikającą z (6.2). Istotnie, niech A będzie macierzą stopnia $m+1$ o wyznaczniku $C(l\,/\,m+1)$ i niech w (6.2) będzie $p = s = 1$, $q = t = m+1$. Łatwo zauważyć, że skreślenie w A pierwszego lub ostatniego wiersza i pierwszej lub ostatniej kolumny daje macierz tego samego typu. Ściślej, tożsamość Sylvestera ma wtedy taką postać:

$$C(l-1\,/\,m)C(l+1\,/\,m) - [C(l\,/\,m)]^2 = C(l\,/\,m+1)C(l\,/\,m-1). \tag{6.4}$$

Ta tożsamość pozwala m.in. udowodnić pewną własność przybliżeń Padégo *szeregu Stieltjesa*. Nazywamy tak szereg potęgowy (6.3) wynikający z definicji

$$f(z) := \int_0^\infty \frac{d\,\varphi(u)}{1+zu}.$$

φ jest tu funkcją ograniczoną niemalejącą, która przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości i ma skończone momenty $\int_0^\infty u^j\,d\varphi(u)$ dla $j \geqslant 0$. Korzystając z (6.4), udowodniono, że dla takiego szeregu bieguny dowolnego przybliżenia Padégo $[l\,/\,m]_f$, gdzie $m \geqslant 1$, $l \geqslant m-1$, są pojedyncze, leżą na ujemnej półosi rzeczywistej i mają residua dodatnie ([1], cz. I, s. 166).

W zastosowaniach są często znane jedynie początkowe współczynniki c_k szeregu (6.3). Tylko od nich zależy pewien fragment *tablicy* C, z definicji zawierającej wyznaczniki $C(l\,/\,m)$. Możemy je obliczać, stosując tożsamość (6.4). Występuje w niej pięć wyznaczników, które w tablicy C są rozmieszczone tak:

$$\begin{array}{ccc} & C(l-1\,/\,m) & \\ C(l\,/\,m-1) & C(l\,/\,m) & C(l\,/\,m+1) \\ & C(l+1\,/\,m) & \end{array}$$

Ponieważ $C(l\,/\,0) = 1$ i $C(l\,/\,1) := c_l$, więc za pomocą (6.4) można rekurencyjnie obliczać $C(l\,/\,m+1)$ dla $m = 1, 2, \ldots$, oczywiście dopóki wcześniej wyznaczone $C(l\,/\,m-1)$ są różne od 0. Della Dora [10] zastosował tożsamość Sylvestera także w ogólniejszej teorii, mianowicie w aproksymacji Padégo–Hermite'a (jej podstawowe pojęcia można znaleźć w [21]).

W związku z aproksymacją Padégo warto wspomnieć, że uzupełnieniem tożsamości (6.4) potrzebnym wtedy, gdy pewne $C(l\,/\,m)$ znikają, jest *tożsamość Gilewicza–Froissarta* ([14], s. 374), której w [22] nadano bardzo prostą postać i która — jak się wydaje — nie wynika z klasycznych tożsamości wyznacznikowych. Trzeba wiedzieć, że w tablicy C wszystkie zera tworzą rozłączne kwadraty. Przypuśćmy dla przykładu, że jeden z nich ma rozmiar 4×4. Pewne elementy tablicy otaczające taki kwadrat i oznaczone niżej symbolami $N', \ldots, S'$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & N' & & & & \\ & & & \bullet & & N^+ & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & & \\ & W^- & 0 & 0 & 0 & 0 & & E' & \\ W' & & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & & \\ & W^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & \bullet & & S^- & & & & \\ & & & S' & & & & & \end{array} \tag{6.5}$$

spełniają tożsamość

$$\begin{vmatrix} N' & N^+ & E' \\ W^- & 0 & S^- \\ W' & W^+ & S' \end{vmatrix} = 0.$$

Z tej równości można wyznaczyć E', jeśli już znaleziono (także za pomocą (6.4)) wyznaczniki $C(l\,/\,m)$ leżące na lewo od E'. Zauważmy, że wyżej wielkości $N', \ldots, S'$ i zero są rozmieszczone tak samo, z dokładnością do obrotu o 45°, jak w (6.5).

Obliczanie ciągu lub tablicy tych przybliżeń Padégo $[l\,/\,m]_f$, które istnieją, może się obyć bez konstrukcji tablicy C. Wtedy jednak ominięcie „pustych” pozycji (l, m) wymaga pewnych szczególnych zabiegów. Jak wspomniano w [6], Beckermann, Neuber i Mühlbach zbudowali odpowiedni algorytm, korzystając z dopełnień Schura.

Inne zastosowanie tożsamości Sylvestera wiąże się z przyspieszaniem zbieżności ciągów. W praktyce spotykamy często ciągi, które do interesującej nas granicy są zbieżne bardzo wolno. Jeśli ciąg $\{s_n\}$ $(n \geqslant 0)$ jest właśnie taki, to chcielibyśmy przekształcić go na ciąg $\{t_n\}$, zbieżny do tej samej granicy s, ale znacznie szybciej. Wiadomo, że nie istnieje uniwersalna metoda takiego przekształcenia. Znaleziono jednak metody skuteczne w szerokiej klasie ciągów. Jedna z nich wynika z aproksymacji Padégo. Jeśli

$$f(z) := s_0 + \Delta s_0 z + \Delta s_1 z^2 + \ldots,$$

to dla $z = 1$ sumy częściowe tego szeregu są równe $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Zbadane własności aproksymacji Padégo i praktyka obliczeń sugerują, aby za elementy ciągu $\{t_n\}$ uznać wartości $[n\,/\,n]_f(1)$. W 1955 r. Shanks znalazł takie dla nich wyrażenie:

$$[n\,/\,n]_f(1) = \frac{\begin{vmatrix} s_0 & \Delta s_0 & \ldots & \Delta^n s_0 \\ \Delta s_0 & \Delta^2 s_0 & \ldots & \Delta^{n+1} s_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta^n s_0 & \Delta^{n+1} s_0 & \ldots & \Delta^{2n} s_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta s_0 & \ldots & \Delta^n s_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta^{n+1} s_0 & \ldots & \Delta^{2n} s_0 \end{vmatrix}}$$

([1], cz. I, s. 17). Mamy więc tu znów wyznaczniki Hankela i można sądzić, że tożsamość Sylvestera ułatwi ich obliczanie. Warto też przypomnieć o dopełnieniu Schura: wyżej mianownik jest podwyznacznikiem licznika, czyli iloraz można wyrazić, korzystając z (3.4).

W bardzo obszernej rodzinie tzw. *E-algorytmów* przyspieszania zbieżności, autorstwa Brezinskiego i Håvie ([7]), wyróżniają się prostotą *metody Levina* (tamże; dokładny opis znajduje się w [28]). Opierają się one na założeniu, że dla pewnego ciągu pomocniczego $\{\omega_n\}$ zbieżnego do 0 istnieją takie współczynniki c_j, że

$$s_n = s + \omega_n \sum_{j=0}^{\infty} c_j (n+1)^{-j}. \tag{6.6}$$

Ciąg pomocniczy związany z $\{s_n\}$ (i określający konkretną metodę Levina) jest znany, ale współczynniki c_j — nie. Przypuszczając, że powyższy szereg jest dość szybko zbieżny, obcinamy go do sumy k początkowych składników. Zniekształcone w ten sposób równości (6.6) nie są już spełnione przez granicę s, ale pewne jej przybliżenie. Ściślej, definiujemy wielkość $s_n^{(k)}$ za pomocą warunków

$$s_m = s_n^{(k)} + \omega_m \sum_{j=0}^{k-1} c_j (m+1)^{-j} \quad (m = n, n+1, \ldots, n+k).$$

Z wzoru Cramera wynika, że

$$(6.7) \qquad s_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{s_n}{\omega_n} & \dfrac{s_{n+1}}{\omega_{n+1}} & \ldots & \dfrac{s_{n+k}}{\omega_{n+k}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & \ldots & (n+k+1)^{-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (n+1)^{-k+1} & (n+2)^{-k+1} & \ldots & (n+k+1)^{-k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\omega_n} & \dfrac{1}{\omega_{n+1}} & \ldots & \dfrac{1}{\omega_{n+k}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & \ldots & (n+k+1)^{-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (n+1)^{-k+1} & (n+2)^{-k+1} & \ldots & (n+k+1)^{-k+1} \end{vmatrix}}.$$

W ten sposób określamy całą rodzinę, z parametrem k, ciągów $\{s_n^{(k)}\}$. Dla $k = 0$ ten ciąg jest identyczny z $\{s_n\}$. Im większe jest k, tym szybciej ciąg $\{s_n^{(k)}\}$ dąży do s; przynajmniej tego się spodziewamy.

Wzór (6.7) nie miałby praktycznego znaczenia, gdyby trzeba było obliczać każde $s_n^{(k)}$ oddzielnie, jako iloraz wyznaczników stopnia $k+1$. Stosując tożsamość Sylvestera, dowodzi się, że te wyznaczniki można obliczać rekurencyjnie według bardzo prostego wzoru (istnieją też inne metody dowodu).

Licznik i mianownik w (6.7) różnią się tylko pierwszym wierszem. Przyjmijmy ogólniej

$$P_n^{(k)} := \begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{n+k} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & \ldots & (n+k+1)^{-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (n+1)^{-k+1} & (n+2)^{-k+1} & \ldots & (n+k+1)^{-k+1} \end{vmatrix}.$$

Określmy też wyznaczniki Vandermonde'a: $V_n^{(0)} := 1$,

$$V_n^{(k)} := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & \dots & (n+k)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)^{-k+1} & (n+2)^{-k+1} & \dots & (n+k)^{-k+1} \end{vmatrix} \qquad (k>0).$$

Z tożsamości (6.2) zastosowanej do wyznacznika $P_n^{(k)}$ stopnia $k+1$ wynika, że

$$V_{n+1}^{(k)} P_n^{(k-1)} - V_k^{(n)} P_{n+1}^{(k-1)} = V_{n+1}^{(k-1)} P_k^{(n)}.$$

Wyrażenia dla $V_n^{(k)}$ są dość złożone. Nie interesują nas jednak same wyznaczniki $P_k^{(n)}$, tylko ilorazy dwóch takich wyznaczników występujące w (6.7). Dlatego możemy wprowadzić wielkości $Q_n^{(k)}$ takie, że $P_n^{(k)} := \varphi_n^{(k)} Q_n^{(k)}$, gdzie czynniki $\varphi_n^{(k)}$ (niezależne od p_m) dobieramy tak, aby związek rekurencyjny względem tych nowych wielkości był jak najprostszy. Daje to ostatecznie wzór

$$s_n^{(k)} := \frac{L_n^{(k)}}{M_n^{(k)}} \quad (k,\, n = 0, 1, \dots),$$

gdzie

$$L_n^{(0)} := \frac{s_n}{(n+1)\omega_n}, \quad M_n^{(0)} := \frac{1}{(n+1)\omega_n}$$

oraz dla $k > 0$ i $n \geqslant 0$

$$L_n^{(k)} := (n+k+1) L_{n+1}^{(k-1)} - (n+1) L_n^{(k-1)},$$
$$M_n^{(k)} := (n+k+1) M_{n+1}^{(k-1)} - (n+1) M_n^{(k-1)}.$$

7. Tożsamość Schweinsa. W tożsamości Sylvestera (6.2) występują po lewej stronie cztery wyznaczniki stopnia $n-1$, a po prawej — dwa wyznaczniki, odpowiednio stopnia $n-2$ i n. Można z niej otrzymać tożsamość Schweinsa w wersji wiążącej również sześć wyznaczników, ale tylko dwóch różnych stopni. Te wyznaczniki powstają z macierzy A rozmiaru $(n+1)\times n$. Niech liczby naturalne p, q, r, s, t będą takie, że $p < q < r \leqslant n+1$ i $s < t \leqslant n$. Tożsamość (6.2) zastosowana do macierzy $A_{p;}$ (czyli do A bez p-tego wiersza), $A_{q;}$ i $A_{r;}$ ma odpowiednio postać

(7.1) $$|A_{p,q;\,s}|\,|A_{p,r;\,t}| - |A_{p,q;\,t}|\,|A_{p,r;\,s}| = |A_{p,q,r;\,s,t}|\,|A_{p;}|,$$

(7.2) $$|A_{p,q;\,s}|\,|A_{q,r;\,t}| - |A_{p,q;\,t}|\,|A_{q,r;\,s}| = |A_{p,q,r;\,s,t}|\,|A_{q;}|,$$

(7.3) $$|A_{p,r;\,s}|\,|A_{q,r;\,t}| - |A_{p,r;\,t}|\,|A_{q,r;\,s}| = |A_{p,q,r;\,s,t}|\,|A_{r;}|.$$

Pewne wyznaczniki, które występują tu parokrotnie, można wyeliminować. Utwórzmy mianowicie różnicę tożsamości (7.2) pomnożonej stronami przez

$|A_{p,r;\,s}|$ i tożsamości (7.1) pomnożonej przez $|A_{q,r;\,s}|$:

$$|A_{pq;\,s}|\,[|A_{pr;\,s}|\,|A_{qr;\,t}| - |A_{qr;\,s}|\,|A_{pr;\,t}|] \\ = |A_{pqr;\,st}|\,[|A_{pr;\,s}|\,|A_{q;}| - |A_{qr;\,s}|\,|A_{p;}|].$$

Wobec (7.3) lewa strona tej tożsamości jest równa

$$|A_{pq;\,s}|\,|A_{pqr;\,st}|\,|A_{r;}|.$$

Prawa strona tejże tożsamości i powyższy iloczyn zawierają ten sam czynnik $|A_{pqr;\,st}|$. Jeśli zatem jest on różny od zera, to

$$|A_{pr;\,s}|\,|A_{q;}| - |A_{qr;\,s}|\,|A_{p;}| = |A_{pq;\,s}|\,|A_{r;}|. \tag{7.4}$$

Jest to zapowiedziana *tożsamość Schweinsa*. Powyższy dowód jest wzorowany na pracy [5], gdzie jednak tę tożsamość (a także tożsamość Sylvestera) podano w nieco ogólniejszej postaci: elementy pewnego wiersza macierzy A występującego dokładnie w jednym z czynników każdego iloczynu w (6.2) i (7.4) należą do przestrzeni wektorowej nad ciałem zawierającym elementy pozostałych wierszy.

Tożsamość (7.4) jest rzadko cytowana, w [8] nawet o niej nie wspomniano. Muir w I tomie historii [18] referuje wyniki Schweinsa z cz. 3 (*Theorie der Producte mit Versetzungen*) książki [24] z 1825 r. na s. 159–175; w szczególności pisze, że Schweins rozważa na końcu bardzo elementarny przypadek, gdy tożsamość zawiera tylko trzy iloczyny (jak w (7.4)) i że wtedy jego twierdzenie jest „nothing more than one of the extensionals so lengthily dwelt upon by Desnanot”. Pracę [11] tego ostatniego z 1819 r. omówiono tamże na s. 136–148. Można sądzić, że udowodnił on (7.4) dla $n = 2$ i $n = 3$. Wynik Schweinsa jest jednak znacznie bardziej ogólny. Warto go poznać także dlatego, że pokazuje wielość zastosowań metody, której wariantu użyto już w § 5.

Według Muira ([20], s. 124–125) najprostszy dowód twierdzenia Schweinsa wynika z przyrównania dwóch rozwinięć Laplace'a wyznacznika q-tego stopnia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & 0 & \dots & 0 \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,n} & a_{p+1,n+1} & \dots & a_{p+1,q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} & a_{q,n+1} & \dots & a_{qq} \end{vmatrix}, \tag{7.5}$$

gdzie $1 \leqslant p < n < q$. Pierwsze z nich zawiera iloczyny minorów o elementach z p początkowych wierszy wyznacznika przez ich dopełnienia algebraiczne. Ponieważ elementy tych wierszy należące zarazem do kolumn od $(n+1)$-szej do q-tej są zerami, więc rozwinięcie zawiera co najwyżej $\binom{n}{p}$ niezerowych składników, a w nich minory

$$|A[1,2,\dots,p\,|\,j_1,j_2,\dots,j_p]|, \quad \text{gdzie} \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_p \leqslant n.$$

Drugie rozwinięcie zawiera iloczyny minorów o elementach z n początkowych kolumn wyznacznika (7.5). Dopełnienia algebraiczne tych minorów nie znikają co najwyżej wtedy, gdy zawierają tylko elementy z wierszy od $(p+1)$-szego do q-tego, a jest tak w $\binom{q-p}{q-n}$ przypadkach. Oba rozwinięcia dają wartość tego samego wyznacznika. Daje to ogólną, dość skomplikowaną *tożsamość Schweinsa*. Muir nie wyjaśnia, kiedy ona się upraszcza do postaci (7.4). Można udowodnić, że tak jest, gdy wyznacznik (7.5) ma następującą szczególną postać:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} & 0 & \dots & 0 \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \\
a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n-1} \\
a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n} & a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n-1}
\end{vmatrix}$$

$(p = n-1,\ q = 2n-1)$. Wyznacznik zależy od $(n+1)n$ elementów a_{ij} macierzy A określonej jak na początku tego paragrafu. Ponieważ początkowe fragmenty wierszy i końcowe fragmenty kolumn powtarzają się, więc w tym przypadku rozwinięcia są znacznie prostsze. Pierwsze z nich zawiera tylko jeden iloczyn, który może być różny od 0:

$$\pm|A[1,2,\dots,n{-}1\,|\,1,2,\dots,n{-}1]|\,|A[n,n{+}1,1,2,\dots,n{-}2\,|\,n,1,2,\dots,n{-}1]|.$$

W drugim rozwinięciu nie znikają co najwyżej składniki

$$\pm|A[1,2,\dots,n\,|\,1,2,\dots,n]|\,|A[n+1,1,2,\dots,n-2\,|\,1,2,\dots,n-1]|,$$
$$\pm|A[1,2,\dots,n-1,n+1\,|\,1,2,\dots,n]|\,|A[n,1,2,\dots,n-2\,|\,1,2,\dots,n-1]|.$$

Pozostaje ustalić znaki tych iloczynów i uporządkować sensownie wiersze i kolumny wyznaczników. Daje to tożsamość (7.4) dla $p = n-1$, $q = n$, $r = n+1$ i $s = n$, ale to nie ogranicza ogólności wyniku.

Podobny pomysł pozwala udowodnić rodzinę tożsamości innego typu.

Określmy

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n+r,1} & a_{n+r,2} & \dots & a_{n+r,n} \end{bmatrix} \qquad (r \leqslant n).$$

Dla p takiego, że $n < p < n + r$, z elementów tej macierzy tworzymy wyznacznik

$$\tag{7.6} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} & a_{p1} & \dots & a_{pr} \\ 0 & \dots & 0 & a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,r} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+r,1} & \dots & a_{n+r,r} \end{vmatrix}.$$

Odejmijmy od jego wierszy od $(n+1)$-szego do $(n+r)$-tego odpowiednio wiersze od pierwszego do r-tego. W ten sposób zerujemy w wyznaczniku prawy górny blok złożony z p wierszy i r kolumn. Wartość nowego wyznacznika (a więc i poprzedniego) jest równa 0. Istotnie, każdy minor złożony z elementów r ostatnich kolumn zawiera co najwyżej $n + r - p$ wierszy z liczbami a_{ij}, czyli co najmniej $p - n > 0$ wierszy złożonych z samych zer. Rozwińmy teraz wyznacznik (7.6) względem jego n początkowych kolumn. Z wzoru Laplace'a (2.1) wynika, że

$$\tag{7.7} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_n\leqslant p} (-1)^{\sum j_h} |A[j_1, j_2, \ldots, j_n \,|\, 1, 2, \ldots, n]|\, |A_{j_1,j_2,\ldots,j_n;}| = 0.$$

Dla $n = r = 3$ i $p = 4$ daje to wspomnianą już w § 5 tożsamość Bézout. Zauważmy też istotną różnicę między relacją (7.7) a tożsamością Schweinsa (7.4): tam wyznaczniki w każdym iloczynie mają wiele elementów wspólnych, a tu (bez dodatkowych założeń o A) nie mają ich wcale.

Bibliografia

[1] G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, *Padé Approximants*, Part I: *Basic Theory.* Part II: *Extensions and Applications*, Addison-Wesley, Reading, 1981.

[2] T. Banachiewicz, *Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf basierten Auflösung der Systeme lineare Gleichungen*, Acta Astronom. Sér. C 3 (1937), 41–67.

[3] É. Bézout, *Théorie Générale des Équations Algébriques*, Paris, 1779.

[4] J. P. M. Binet, *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur applications à des considérations géométriques*, J. École Polytechn. 9 (1812), 280–302.

[5] C. Brezinski, *Some determinantal identities in a vector space, with applications*, w: Padé Approximation and its Applications (Bad Honnef, 1983), H. Werner, H. J. Bünger (red.), Lecture Notes in Math. 1071, Springer, Berlin 1984, 1–11.

[6] C. Brezinski, *Schur complements and applications in numerical analysis*, w: The Schur Complement and its Applications, F. Zhang (red.), Kluwer, Dordrecht (w druku).

[7] C. Brezinski, M. Redivo Zaglia, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[8] R. A. Brualdi, H. Schneider, *Determinantal identities*: *Gauss*, *Schur*, *Cauchy*, *Sylvester*, *Kronecker*, *Jacobi*, *Binet*, *Laplace*, *Muir*, *and Cayley*, Lin. Alg. Appl. 52/53 (1983), 769–791.

[9] A. Cauchy, *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs...*, J. École Polytechn. 17 (1812), 29–112; Œuvres Compl. Sér. 2, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1905, 91–169.

[10] J. Della Dora, *Contribution à l'approximation de fonctions de la variable complexe au sens de Hermite–Padé et de Hardy*, thèse, Univ. Sci. Méd. de Grenoble, 1980.

[11] P. Desnanot, *Complément de la Théorie des Équations du Premier Degré, contenant...*, Paris, 1819.

[12] F. R. Gantmacher, *Teorija matric*, GITTL, Moskwa, 1954.

[13] M. Gasca, A. Lopez-Carmona, V. Ramirez, *A generalized Sylvester's identity on determinants and its applications to interpolation problems*, w: Multivariate Approximation Theory II, W. Schempp, K. Zeller (red.), Birkhäuser, Basel, 1982.

[14] J. Gilewicz, *Approximants de Padé*, Lecture Notes in Math. 667, Springer, Berlin, 1978.

[15] C. G. J. Jacobi, *De formatione et proprietatibus determinantium*, Crelle's J. 22 (1841), 285–318; Ges. Werke, Band 3, Reimer, 1884, 355–392.

[16] A. Mostowski, M. Stark, *Algebra wyższa*, Cz. I, PWN, Warszawa, 1953.

[17] G. Mühlbach, M. Gasca, *A generalization of Sylvester's identity on determinants and some applications*, Lin. Alg. Appl. 66 (1985), 221–234.

[18] T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, Macmillan, London, 1906 (Vol. I, Part I: *General determinants up to 1841*. Part II: *Special determinants up to 1841*), 1911 (Vol. II: *The period 1841 to 1860*), 1920 (Vol. III: *The period 1861 to 1880*), 1923 (Vol. IV: *The period 1880 to 1900*). Przedruk: Dover, 1966.

[19] T. Muir, *Contributions to the History of Determinants*, *1900–1920*, Blackie, 1930.

[20] T. Muir, *A Treatise on the Theory of Determinants*, wyd. popr. i rozszerz. przez W. H. Metzlera, Dover Publ., New York, 1960.

[21] S. Paszkowski, *Recurrence relations in Padé–Hermite approximation*, J. Comput. Appl. Math. 19 (1987), 99–107.

[22] S. Paszkowski, *Evaluation of a C-table*, J. Comput. Appl. Math. 44 (1992), 219–233.

[23] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. Reine Angew. Math. 147 (1917), 205–232.

[24] F. von Schweins, *Theorie der Differenzen und Differentiale, u.s.w.*, Heidelberg, 1825.

[25] J. J. Sylvester, *On derivation of coexistence*, Part II: *Being the theory of simultaneous simple homogeneous equations*, Philos. Mag. (3).XVI (1840), 37–43; Coll. Math. Papers, Vol. I, Cambridge Univ. Press, 1904, 47–53.

[26] J. J. Sylvester, *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions*, Philos. Mag. (4).I (1851), 295–305; Coll. Math. Papers, Vol. I, Cambridge Univ. Press, 1904, 241–250.

[27] J. J. Sylvester, *On a certain fundamental theorem of determinants*, Philos. Mag. (4).II (1851), 142–145; Coll. Math. Papers, Vol. I, Cambridge Univ. Press, 1904, 252–255.
[28] E. J. Weniger, *Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series*, Computer Phys. Rep. 10 (1989), 189–371.

Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN
skr. poczt. 937
50-950 Wrocław
E-mail: S.Paszkowski@int.pan.wroc.pl

Abstract. Some rather unfamiliar determinantal identities are given and proved. These are: the Jacobi identity, expression for the determinant of a matrix product (including the Binet–Cauchy formula), Sylvester's and Schweins's identities. Different versions of Sylvester's identity play here a crucial role. Some examples of its applications are mentioned. The proofs are based in part on the Schur complement.
Key words: determinantal identities of Jacobi, Sylvester and Schweins, formula of Binet–Cauchy, Schur complement.