MATEMATYKA STOSOWANA 6, 2005

B. Kopociński (Wrocław)

Czy pani prezydentowa będzie lepszym prezydentem od pana prezydenta?

Tym pytaniem pasjonowali się politycy i dziennikarze amerykańscy pod koniec prezydentury Billa Clintona. Jakkolwiek wydaje się, że problem jest beznadziejny, pokażemy, że istnieje możliwość sensownej odpowiedzi na nie.

Jak zwykle w tego typu zadaniach dodatkowe założenia są ukryte w warstwie słownej. Możemy więc dodać, że oceny naszych bohaterów są obserwowane jedna po drugiej i są zależne od przypadku. Oczywiście nie możemy korzystać z dodatkowej wiedzy o naszych bohaterach, którą każdy z nas posiada, co znaczy, że *a priori* jakichkolwiek różnic nie możemy założyć.

Dla skonkretyzowania rozważań przyjmijmy, że osoby oceniamy w punktach, sumując je np. dzień po dniu w ciągu miesiąca. Formalnie biorąc, załóżmy, że ocenę prezydenta opisuje zmienna losowa Y, ocenę prezydentowej zmienna losowa X. Obie te zmienne mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa F: $F(x) = P(X \leq x) = P(Y \leq y)$, $-\infty < x < \infty$, i niech $f = F'$ będzie gęstością rozkładu. Tu skrywamy założenie, że zdarzenie $X = Y$ ma prawdopodobieństwo zero i nie musi być brane pod uwagę. Korzystając z oznaczeń, dodajmy jeszcze założenie, że X i Y są wzajemnie niezależne, co można rozumieć w ten sposób, że nie ma np. osoby trzeciej, która wpływa na sprawujących urząd.

Powiemy, że zmienna losowa X przyjmie wartość większą od zmiennej losowej Y, co zapisujemy $X > Y$, jeśli $P(X > Y) > 0{,}5$. Optymistą nazwiemy osobę, która nie kierując się żadnymi racjonalnymi przesłankami, uważa, że będzie $X > Y$. Obliczamy:

$$P(X > Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x > Y) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Ten wynik usprawiedliwia pesymistów, którzy uważają, że przy tak skromnej wiedzy, jaką wysnuliśmy z treści zadania, nie można uzyskać więcej. Sprawdzimy teraz, że istnieje postępowanie ([1]), które wskaże osobę lepszą z prawdopodobieństwem większym od 0,5.

Weźmy dowolną liczbę a. Mając na uwadze ocenę Y prezydenta w pozostałym mu jeszcze czasie sprawowania urzędu, definiujemy postępowanie: jeśli będzie $Y < a$, to przewidujemy, że $X > Y$, w przeciwnym razie powiemy, że $X < Y$. Teraz obliczamy prawdopodobieństwo P trafnego wskazania osoby:

$$\begin{aligned} P &= P(Y < a,\, X > Y) + P(Y > a,\, X < Y) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{a} f(y)P(X > y)\,dy + \int\limits_{a}^{\infty} f(y)P(X < y)\,dy \\ &= F(a) - \frac{1}{2}F^2(a) + \frac{1}{2}(1 - F^2(a)) = \frac{1}{2} + F(a) - F^2(a). \end{aligned}$$

Sprawdźmy, że $P = \frac{1}{2} + w - w^2 > \frac{1}{2}$ dla $0 < w = F(a) < 1$. W szczególności, dla szczęśliwie wybranego a, dla którego $F(a) = \frac{1}{2}$, mamy $P = 0{,}75$ szans na dobrą prognozę!

Należy dodać, że naszych decyzji nie możemy uzależniać od obserwowanych dotychczas ocen prezydenta. Z wzajemnej niezależności zmiennych losowych X i Y wynika, że rozkład prawdopodobieństwa Y przy dowolnym warunku $X = x_0$ jest zawsze taki sam, tj. F, i ten warunek nie może być wzięty pod uwagę przy poszukiwaniu rozwiązania problemu.

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
Pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
E-mail: ibk@math.uni.wroc.pl

[1] Zakomunikował mi je Józef Łukaszewicz.