

BOGDAN KAŹMIERCZAK (Warszawa)

Fale biegnące w ośrodkach z dyfuzją

Streszczenie. W pracy omawiamy rozwiązania w postaci fal biegnących dla równań modelujących ośrodki nieliniowe z efektywną dyfuzją. Rozwiązania takie mogą opisywać np. propagację frontów heteroklinicznych oraz impulsów (wzbudzeń ośrodka). W pracy przedstawiamy kilka przykładów procesów, w których pojęcie fali biegnącej dobrze oddaje istotę analizowanych zjawisk. Są to: plazma podtrzymywana promieniowaniem laserowym, przejścia fazowe w płynach van der Waalsa, morfogeneza skóry oraz transkrypcja materiału genetycznego z DNA na RNA.

Słowa kluczowe: fale biegnące heterokliniczne i homokliniczne, indeks Conleya, perturbacje singularne, plazma laserowa, przejścia fazowe, morfogeneza skóry, transkrypcja DNA-RNA.

1. Ogólna charakterystyka fal biegnących. Fale biegnące to zjawiska bardzo często występujące w przyrodzie, zarówno w skali makroskopowej (fale solitonowe na wodzie, przejścia fazowe typu para-ciecz), jak też mikroskopowej (rozwój tkanki nowotworowej, fale wapniowe w przestrzeni międzykomórkowej i w samych komórkach [1], [2]). Fale biegnące są również intrygujące z matematycznego punktu widzenia. Stanowią one ważną klasę rozwiązań dla wielu typów układów równań różniczkowych cząstkowych. Są to rozwiązania istotnie nieliniowe: w procesach opisywanych przez autonomiczne równania paraboliczne, nieliniowości (np. członów źródłowych) są niezbędny warunkiem ich występowania. W wielu sytuacjach rozwiązania odpowiednich zagadnień początkowych dążą asymptotycznie z czasem właśnie do nieliniowych fal biegnących. Fale biegnące są zatem często atraktorami o dużym basenie przyciągania ([3]–[6]).

W pracy przedstawimy cztery przykłady procesów, w których pojęcie fali biegnącej jest szczególnie użyteczne. Przykłady te, zdaniem autora, dobrze ilustrują charakterystyczne problemy związane z opisem zjawisk poprzez rozwiązanie w postaci fal biegnących.

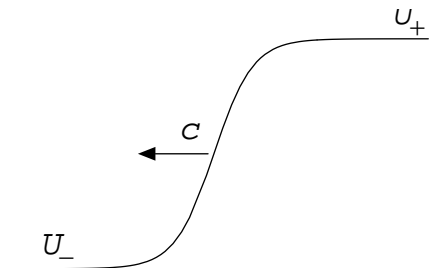
Poniżej pod pojęciem fali biegnącej będziemy rozumieć fale płaskie, poruszające się w przestrzeni w ustalonym kierunku wyznaczonym przez wektor

Praca była częściowo finansowana z projektu badawczego KBN 8T07A04520.

jednostkowy \vec{k} , z ustaloną prędkością c . Rozwiązania takie mogą być zatem reprezentowane przez funkcje postaci $u(\vec{x}, t) = U(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)$. W przypadku jednego równania u jest funkcją skalarną, w przypadku większej liczby równań $u = (u_1, \dots, u_n)$ jest funkcją wektorową. Tak więc funkcje te zależą tylko od jednej zmiennej skalarnej $\xi := \vec{k} \cdot \vec{x} - ct$ i są stałe na każdej hiperpłaszczyźnie prostopadłej do \vec{k} . Jeśli przy poruszaniu się równoległe do kierunku propagacji składowe U osiągają asymptotycznie ustalone wartości, tzn.

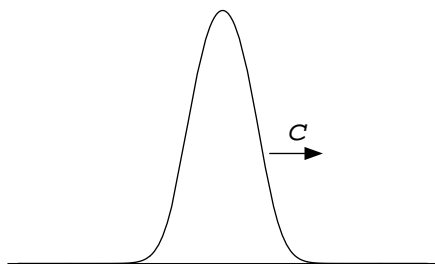
$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = U_{\pm},$$

wektory U_- i U_+ nazywamy *stanami asymptotycznymi*. Jeśli stany asymptotyczne fali biegnącej są różne, tzn. $U_- \neq U_+$, nazywamy ją *falą heterokliniczną*. Jeśli stany asymptotyczne fali biegnącej są takie same, tzn. $U_- = U_+$, nazywamy ją *falą homokliniczną*. Heterokliniczne fale biegnące mogą opisywać procesy typu przejść fazowych, zjawisk detonacji i spalania, frontów reakcji chemicznych, frontów jonizacji w plazmie laserowej, frontów polimeryzacji, fal epidemiologicznych, fal populacyjnych, procesy budowania się tkanek czy też ziarninowania się ran. Fale homokliniczne opisują natomiast zjawiska polegające na propagacji impulsów i wzbudzeń ośrodka, np. propagację impulsów elektrycznych w systemie nerwowym, fale solitonowe na powierzchni wody, fale solitonowe w plazmie czy też solitony w optyce nieliniowej. Zjawiska tego typu mogą być stosunkowo łatwo generowane w eksperymentach. Badając profil oraz prędkość propagacji fal biegnących, uzyskać można ważne informacje dotyczące znaczenia różnych parametrów charakteryzujących opisywany ośrodek. Badanie fal biegnących ma zatem duże znaczenie poznawcze.



Rys. 1. Schematyczny profil fali heteroklinicznej

Fale biegnące są również jednym z zasadniczych elementów konstrukcji rozwiązań singularnie zaburzonych układów nieliniowych równań typu reakcji-dyfuzji w postaci warstwy przejściowej między dwoma stanami równowagowymi układu. Możemy ich zatem używać do opisu zjawisk nawet o skomplikowanej wielowymiarowej strukturze przestrzennej.



Rys. 2. Schematyczny profil fali homoklinicznej

Właściwości fali biegnącej zależą w dużym stopniu od właściwości jej stanów asymptotycznych. Intuicyjnie stan asymptotyczny nazywamy *stabilnym* (lub *niestabilnym*), jeśli jest on stabilnym (niestabilnym) rozwiązaniem wyjściowego układu równań różniczkowych cząstkowych ze względu na odpowiednią klasę zaburzeń. W szczególności dla układu równań typu reakcji-dyfuzji w postaci diagonalnej

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \Delta u_i + F_i(u, \nabla u),$$

$i = 1, \dots, n \geq 1$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, stanami asymptotycznymi nazywamy wektory stałe u_0 będące rozwiązaniami układu

$$F_i(u, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Stan układu nazywamy *stabilnym*, jeśli wszystkie wartości własne jakobianu $\partial F / \partial u(u_0, 0)$ mają części rzeczywiste mniejsze od zera, a *niestabilnym*, jeśli warunek ten nie jest spełniony. Tak zdefiniowany stan stabilny jest stabilnym rozwiązaniem układu (1) ze względu na perturbacje jednorodnie przestrzenne.

Z uwagi na szereg istotnych różnic fale biegnące możemy podzielić na takie, które łączą dwa stany stabilne, oraz takie, które łączą stan niestabilny ze stanem stabilnym.

Profil fali biegnącej $U(\xi)$ jest rozwiązaniem układu zwyczajnych równań różniczkowych z warunkami brzegowymi w nieskończoności. Prędkość propagacji fali wchodzi przy tym do układu jako dodatkowy parametr. W wielu sytuacjach, jeśli fala łączy dwa stabilne stany asymptotyczne, parametr ten może przyjmować tylko określone wartości. Staje się zatem dodatkową niewiadomą, podobnie do wartości własnej w zagadnieniach własnych. Zbiór dopuszczalnych prędkości dla fal łączących stany niestabilne ze stabilnymi jest najczęściej zbiorem liczb rzeczywistych postaci $c \in [c^*, \infty)$, $c^* > 0$, albo postaci $c \in (-\infty, c_*]$, $c_* < 0$. Z fizycznego punktu widzenia, zasadnicze znaczenie mają jednak prędkości graniczne, tzn. c^* (minimalna dodatnia) w pierwszym przypadku albo c_* (maksymalna ujemna) w drugim. Ich wartości należy zatem wyznaczyć lub przynajmniej oszacować.

PRZYKŁADY ($n = 1$)

1. *Przypadek monostabilny.* Rozważmy tzw. równanie KPP (Kołmogorow, Pietrowski, Piskunow, 1937) [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1 - u).$$

Równanie to stosuje się do opisu szeregu zjawisk w genetyce populacyjnej, ekologii, procesów gojenia się ran, czy też zjawisk zachodzących podczas morfogenezy skóry.

Stanami asymptotycznymi są tutaj stałe $u = 0$ oraz $u = 1$. Łatwo sprawdzić, że $u = 0$ jest stanem niestabilnym, a $u = 1$ jest stanem stabilnym. Podstawiając

$$(2) \quad u(x, t) = U(x - ct) := U(\xi),$$

dochodzimy do równania zwyczajnego

$$U'' + cU' + U(1 - U) = 0.$$

Standardowa analiza w płaszczyźnie fazowej dowodzi, że dla wszystkich $c > 0$ równanie to posiada rozwiązanie heterokliniczne $U : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ takie, że $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = 1$ oraz $\lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi) = 0$. Jednak tylko dla $c \geq 2$, $U(\xi) > 0$ dla $\xi \in \mathbb{R}^1$. Zatem $c = 2$ jest prędkością minimalną.

2. *Przypadek bistabilny.* Rozważmy równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D^2 \Delta u + u(u - a)(1 - u), \quad a \in (0, 1).$$

Stabilnymi stanami asymptotycznymi są tutaj stałe $u = 0$ i $u = 1$, a stanem niestabilnym stała $u = a$. Równanie to ma zastosowanie np. do opisu plazmy podtrzymywanej promieniowaniem laserowym czy też propagacji jonów wapnia w przestrzeni międzykomórkowej i wewnątrz komórek. Podstawienie (2) doprowadza nas do równania postaci

$$D^2 U'' + cU' + U(U - a)(1 - U) = 0.$$

Okazuje się, że istnieje dokładnie jedno $c = \sqrt{2D}(\frac{1}{2} - a)$, dla którego istnieje rozwiązanie $U : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ takie, że $U(-\infty) = 1$, $U(\infty) = 0$. Wyraża się ono wzorem

$$U(\xi) = \frac{1}{1 + \exp[\frac{1}{\sqrt{2D}}\xi]}.$$

Widzimy, że w przypadku bistabilnym prędkość fali staje się dodatkowym parametrem, który należy wyznaczyć.

2. Fale biegnące w plazmie laserowej. Prace [7]–[9] zostały w dużej części zainspirowane badaniami nad plazmą laserową prowadzonymi w IPPT PAN. Fale biegnące modelują ruch granic oddzielających obszary gorącego

gazu zjonizowanego od zimnego gazu napływowego. Innymi słowy, opisują ruch obszaru zajmowanego przez plazmę. Jeśli procesy jonizacyjne w plazmie laserowej mają charakter deflagacyjny (ruchy granic z prędkością dużo mniejszą od prędkości dźwięku), to ciśnienie panujące w układzie plazmowym może być uważane za stałe [14]. Temperaturę gazu (w modelu jednotemperaturowym) można wtedy opisać jednym równaniem typu reakcji-dyfuzji-konwekcji. Równanie to uzupełnione jest równaniem na natężenie promieniowania laserowego. Jeśli jednak dokonać odpowiedniego skalowania, to współczynnik pochłaniania promieniowania przez zjonizowany gaz jest wielkością relatywnie małą [9]. W pierwszym przybliżeniu możemy więc przyjąć, że współczynnik ten jest równy zero. W ten sposób dochodzimy do pojedynczego równania typu reakcji-dyfuzji-konwekcji postaci

$$(3) \quad C(T) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) T = \nabla \cdot (k \vec{\nabla} T) + f(T),$$

gdzie

$$f(T) = \kappa(T)\mathcal{I} - H(T).$$

Przez κ oznaczyliśmy tutaj współczynnik pochłaniania promieniowania laserowego przez gaz roboczy (np. argon, hel, ksenon); \mathcal{I} jest natężeniem promieniowania laserowego, a H funkcją opisującą straty energetyczne na skutek promieniowania.

Istnienie i własności fal biegnących dla równań postaci (3) są stosunkowo dobrze zbadane. Poszukiwanie fal biegnących sprowadza się do analizy istnienia połączeń heteroklinicznych (lub homoklinicznych) skalarne równania zwyczajnego drugiego rzędu. Tak więc, po podstawieniu rozwiązania w postaci fali biegnącej $U(\xi) = T(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)$ otrzymujemy równanie

$$(k(U)U')' - qC(U)U' + f(U) = 0,$$

gdzie $q := \vec{v} \cdot \vec{k} - c = \text{const}$, na podstawie równania ciągłości ([8], str. 398). Wprowadzając dalej potencjał cieplny ([9])

$$u(U) = \int_{U_0}^U k(s) ds,$$

dochodzimy do równania $u'' - qc(u)u' + f(u) = 0$.

Dla szeregu konkretnych postaci współczynników można znaleźć analityczną postać rozwiązań takich równań, jednak w większości przypadków jest to niemożliwe.

W pracy [7] badany jest problem istnienia i własności rozwiązań heteroklinicznych dla równania postaci

$$(4) \quad u'' - qc(u, u')u' - g(u) = 0,$$

gdzie $'$ oznacza różniczkowanie względem $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Zakładamy, że istnieje $\alpha \in (0, 1)$ takie, że $g(0) = g(\alpha) = g(1) = 0$, przy czym $g(u) \geq 0$ dla $u \in [0, \alpha]$, $g(u) > 0$ dla wszystkich $u > 0$ dostatecznie małych oraz $\int_0^1 g(u) du < 0$. Zakładamy również, że istnieje jednoznacznie określone $\gamma \in (\alpha, 1)$ takie, że $\int_0^u g(s) ds > 0$ dla wszystkich $u \in (0, \gamma)$, $\int_0^\gamma g(s) ds = 0$ oraz $g(u) < 0$ dla $u \in (\gamma, 1)$.

Interesujemy się rozwiązaniami $u(\xi) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ takimi, że

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u'(\xi) = 0$$

oraz $u'(\xi) > 0$ dla $\xi \in \mathbb{R}^1$.

W pracy [7] konstruujemy dwa ciągi monotonicznie zbieżne do profilu fali biegnącej oraz jej prędkości. Pozwala to na znalezienie ich dowolnie dokładnych aproksymacji. Pierwszy z tych ciągów, $\{(q_i, Z_i)\}_{i=1}^\infty$, gdzie $C^0 \ni Z_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, jest nierosnący w składowej q i niemalejący w składowej Z (dla każdego $u \in [0, 1]$). (Zauważmy, że rozwiązanie reprezentowane jest tutaj przez funkcję opisującą jego trajektorię w przestrzeni fazowej (u, u') .) Drugi z ciągów, $\{(Q_i, N_i)\}_{i=1}^\infty$, $C^0 \ni N_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, jest niemalejący w składowej Q i nierosnący w składowej N (dla każdego $u \in [0, 1]$). Oba ciągi dążą do jednoznacznie określonej pary heteroklinicznej (c, U) . Wnioskujemy stąd, że zachodzą nierówności

$$q_i \geq c \geq Q_i, \quad Z_i(u) \leq U(u) \leq N_i(u).$$

Wykorzystując powyższe nierówności, możemy odpowiedzieć na pytanie o istnienie frontu heteroklinicznego łączącego dwa stabilne, lecz niekolejne stany stałe pojedynczego równania reakcji-dyfuzji. Takie problemy pojawiają się w opisie sekwencji dwóch reakcji chemicznych. Podobna sytuacja ma miejsce w opisie gazu zjonizowanego składającego się z dwóch gazów o znacznie różniących się potencjałach jonizacyjnych, np. helu i ksenonu.

Niech $h : [0, u_4] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Niech $0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ spełniają następujące warunki:

1. $h(u) > 0$ dla $u \in (0, u_1)$, $h(u) < 0$ dla $u \in (u_1, u_2)$ oraz $\int_0^{u_2} h(s) ds < 0$.
2. $h(u) > 0$ dla $u \in (u_2, u_3)$, $h(u) < 0$ dla $u \in (u_3, u_4)$ oraz $\int_{u_2}^{u_4} h(s) ds < 0$.

Powstaje naturalne pytanie: Czy istnieje para heterokliniczna łącząca stany 0 i u_4 oraz spełniająca równanie

$$(5) \quad u'' - qu' - h(u) = 0?$$

Częściową odpowiedź na to pytanie zawiera praca [15].

LEMAT 1 ([15], Theorem 2.7). *Załóżmy, że dla $q = q_1^*$ istnieje rozwiązanie heterokliniczne dla równania (5) łączące 0 i u_2 . Załóżmy, że dla $q = q_2^*$ istnieje rozwiązanie heterokliniczne łączące u_2 i u_4 . Niech $q_1^* < q_2^*$. Istnieje wtedy jednoznacznie określone $q_0^* \in (q_1^*, q_2^*)$ takie, że dla $q = q_0^*$ istnieje*

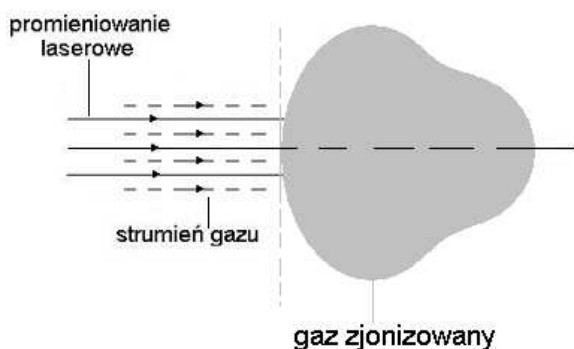
rozwiązanie heterokliniczne łączące 0 i u_4 (jednoznaczne z dokładnością do przesunięcia w ξ). ■

Tak więc głównym problemem jest sprawdzenie nierówności $q_1^* < q_2^*$. Niech $\{(q_i, Z_i)\}_1^\infty$ oznacza wspomniany wyżej ciąg funkcji h na przedziale $(0, u_2)$, a $\{(Q_i, N_i)\}_1^\infty$ wspomniany ciąg dla tej funkcji na przedziale (u_3, u_4) .

Zachodzi zatem następujący lemat.

LEMAT 2. Załóżmy, że spełnione są warunki lematu 1. Istnieje para heterokliniczna $(q, u) \in \mathbb{R}^1 \times C^2(\mathbb{R}^1)$ taka, że $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = u_4$, $u'(\xi) > 0$ dla $\xi \in \mathbb{R}^1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $k \geq 1$ takie, że $Q_k > q_k$. ■

Dla dwu i więcej równań typu reakcji-dyfuzji sytuacja jest o wiele bardziej skomplikowana. Problem istnienia fal biegnących jest w tym przypadku trudnym zagadnieniem jakościowej teorii równań różniczkowych. Teoretyczne udowodnienie istnienia takich rozwiązań jest tym bardziej ważne, iż numeryczne znajdowanie orbit heteroklinicznych w wielowymiarowej przestrzeni fazowej (w szczególności łączących punkty siodłowe układów pierwszego rzędu) jest zadaniem bardzo trudnym.



Rys. 3. Plazma podtrzymywana promieniowaniem laserowym

W modelu jednotemperaturowym plazmy zakłada się, że temperatury składowej elektronowej i składowej ciężkiej (atomów i jonów) są takie same. W procesach nierównowagowych, między innymi na froncie fali jonizacyjnej, temperatury te mogą być różne. Bardziej adekwatny do opisu takich zjawisk jest zatem model dwutemperaturowy, a w przypadku plazmy wieloskładnikowej (składającej się z mieszaniny kilku gazów) model wielotemperaturowy. W przypadku $n - 1$ składników, stan plazmy jest tutaj opisywany przez n temperatur: temperaturę składowej elektronowej i temperatury $n - 1$ składników ciężkich.

Problem istnienia fal biegnących w takim modelu był jedną z motywacji pracy [8], w której stosując teorię indeksu Conleya, przeanalizowano ogólne układy typu reakcji-dyfuzji spełniające tzw. lokalne warunki monotoniczności. Otrzymane twierdzenia implikują między innymi istnienie fal jonizacyjnych w modelu plazmy wieloskładnikowej. W drugiej części pracy udowodniono twierdzenia o istnieniu fal heteroklinicznych dla układów opisujących gatunki symbiotyczne w ekologii. Rezultaty uzyskane w pracy [8] są uogólnieniami znanych do tej pory rezultatów odnoszących się do układów spełniających lokalne warunki monotoniczności (por. [16], [17], [6]).

Podstawowe pojęcia teorii indeksu Conleya

Teoria indeksu Conleya bada własności zbiorów niezmienniczych układów dynamicznych. Mogą to być np. potoki generowane przez układy zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego rzędu. Zbiór I nazywamy *niezmienniczym* ze względu na potok ϕ , jeśli dla wszystkich $x_0 \in I$ spełniony jest warunek $\phi(x_0, t) \in I$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^1$. Przykładami zbiorów niezmienniczych są np. punkty singularne układu lub trajektorie łączące (o ile istnieją). W tym przypadku każdemu otoczeniu izolującemu N , tj. zwartemu podzbiorniowi przestrzeni fazowej spełniającemu warunek $I(N) \cup \partial N \neq \emptyset$, gdzie ∂N oznacza brzeg N , a $I(N)$ jest maksymalnym zbiorem niezmienniczym zawartym w N , możemy przyporządkować indeks homotopii $h(I(N))$. Jeśli N jest w postaci tzw. bloku izolującego, to indeks homotopii jest klasą homotopii przestrzeni ilorazowej N i N^- :

$$h(I(N)) \cong N/N^-$$

gdzie $N^- := (N \setminus N^- \cup [N^-, [N^-])$ (por. [18], [19]). $N^- \subset \partial N$ jest tutaj zbiorem punktów x_0 spełniających warunek $\phi(x_0, t) \notin N$ dla wszystkich dostatecznie małych $t > 0$. Zbiór N^- nazywa się zbiorem silnych punktów wyjścia. (Jeśli N nie jest blokiem izolującym, to $h(I(N))$ definiuje się, używając pojęcia tzw. pary indeksowej [18].) $h(I(N))$ jest zatem dobrze określone nawet bez znajomości zbioru $I(N)$. Udowadnia się, że $I(N) \neq \emptyset$, jeśli $h(I(N)) \not\cong \bar{0}$, gdzie $\bar{0}$ jest zerową klasą homotopii. (Jest to klasa homotopii przestrzeni punktowanej $[0, 1]/\{0\}$.) Zasadniczą własnością indeksu homotopii jest jego niezmienniczość ze względu na kontynuację. Załóżmy, że mamy rodzinę potoków ϕ_λ ciągłą względem parametru $\lambda \in [0, 1]$. Niech N_λ będzie rodziną zbiorów ciągłą względem λ . Niech dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ zbiór N_λ będzie otoczeniem izolującym dla potoku ϕ_λ . Wtedy $h(I(N_\lambda)) = h(I(N_0))$ dla wszystkich $\lambda \in [0, 1]$. Własność ta pozwala niejednokrotnie sprowadzić rozpatrywany problem do analizy prostszego układu równań, dla którego znalezienie indeksów homotopii jest stosunkowo łatwe. W szczególności, z istnienia trajektorii łączącej wybrane punkty singularne dla tego układu możemy wnioskować o istnieniu trajektorii łączącej dla układu wyjściowego.

W zastosowaniu do plazmy laserowej praca [8] zakłada lokalną stałość natężenia promieniowania laserowego. Jego wartość występuje w rozważanym układzie równań różniczkowych zwyczajnych jako parametr. Następnym przybliżeniem w badaniu fal jonizacyjnych w plazmie jest uwzględnienie efektu zmienności natężenia promieniowania laserowego. W pracy [9], stosując geometryczną teorię perturbacji singularnych ([20], [21]), udowadnia się istnienie homoklinicznych fal temperatury w modelu jednotemperaturowym plazmy. Parametr singularny jest tutaj zadany przez bezwymiarowy

współczynnik pochłaniania promieniowania laserowego przez zjonizowany gaz. Analizowany układ równań różniczkowych zwyczajnych jest szczególnym przypadkiem układu postaci

$$(6) \quad X' = F(X, Y), \quad Y' = \varepsilon G(X, Y),$$

gdzie $X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^k$, $m, k \geq 1$ a $'$ oznacza różniczkowanie względem zmiennej ξ . (W rozważanym przez nas problemie plazmowym zmiennej Y odpowiada natężenie promieniowania laserowego I .) Jeśli wprowadzić nową zmienną niezależną $\tau = \varepsilon\xi$, to (6) przechodzi w układ postaci

$$(7) \quad \varepsilon \dot{X} = F(X, Y), \quad \dot{Y} = G(X, Y),$$

gdzie $\dot{}$ oznacza różniczkowanie względem zmiennej τ . Przyjmując $\varepsilon = 0$, otrzymujemy układ zdegenerowany

$$(8) \quad 0 = F(X, Y), \quad \dot{Y} = G(X, Y).$$

Zbiór rozwiązań równania $F(X, Y) = 0$ jest w istocie zbiorem punktów singularnych układu $X' = F(X, Y)$ (sparametryzowanych przez Y). Zbiór ten może składać się z jednej lub większej liczby rozłącznych rozmaitości $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_l$, $l \geq 0$. Załóżmy, że \mathcal{R}_j , $j \in \{0, \dots, l\}$, jest zbiorem punktów postaci $(\Psi_j(Y), Y)$. Na \mathcal{R}_j układ (8) jest wtedy równoważny układowi

$$(9) \quad \dot{Y} = G(\Psi_j(Y), Y).$$

Przypuśćmy, że dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ chcemy znaleźć rozwiązanie $(X^\varepsilon(\xi), Y^\varepsilon(\xi))$ układu (6) takie, że $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (X^\varepsilon(\xi), Y^\varepsilon(\xi)) = (X_\pm, Y_\pm) \in \mathcal{R}_p$ oraz

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^1} \text{dist}[(X(\xi), Y(\xi)), \mathcal{R}_s] = o(1)$$

dla $\varepsilon \rightarrow 0$. Załóżmy też, że dla $\varepsilon = 0$ istnieją rozwiązania $T_{ps}(\xi) = (X_{ps}(\xi), Y_{ps}(\xi))$, $T_{sp}(\xi) = (X_{sp}(\xi), Y_{sp}(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}^1$, układu (6) takie, że $T_{ps}(-\infty), T_{sp}(\infty) \in \mathcal{R}_p$, $T_{ps}(\infty), T_{sp}(-\infty) \in \mathcal{R}_s$, oraz rozwiązanie $T_{ss}(\tau) = (\Psi_s(Y(\tau)), Y(\tau))$ układu (9) takie, że $Y(0) = Y_{ps}$, $Y(\tau^*) = Y_{sp}$ dla pewnego $\tau^* > 0$. Niech O_{ps}, O_{sp}, O_{ss} oznaczają trajektorie odpowiadające tym rozwiązaniom. Sumę $O_s := O_{ps} \cup O_{sp} \cup O_{ss}$ nazywamy *orbitą singularną*. W ramach geometrycznej teorii zaburzeń singularnych można dowieść, że istnieje orbita $(X^\varepsilon(\xi), Y^\varepsilon(\xi))$ o powyższych właściwościach. Jest ona perturbacją orbity singularnej. Dowód polega na wykazaniu transwersalności przecięć rozmaitości stabilnych lub niestabilnych (dla układu $X' = F(X, Y)$) odpowiednio dobranych podzbiorów \mathcal{R}_p i \mathcal{R}_s . W przypadku rozpatrywanego problemu plazmowego \mathcal{R}_p odpowiada temperaturze zimnego gazu, tak więc znaleziona orbita jest homokliniczna ze względu na temperaturę oraz heterokliniczna ze względu na natężenie promieniowania laserowego. Co więcej, zgodnie z rezultatami pracy [9], dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ prędkość fali biegnącej przy uwzględnieniu efektu pochłaniania różni się od prędko-

ści przy ustalonej wartości natężenia promieniowania laserowego o człony rzędu $O(\varepsilon)$. Usprawiedliwia to w pewnym sensie zastosowane w pracy [8] przybliżenie stałości natężenia promieniowania laserowego.

3. Fale biegnące w modelu płynów van der Waalsa. W pracach [22], [23] zaproponowany został czteroprędkościowy model płynów van der Waalsa. Model ten został opracowany przez K. Piechóra na podstawie tzw. kinetycznego równania Enskog–Własowa. Ponieważ pozwala on na jednoczesny opis zarówno gazów, jak i cieczy, może być zastosowany do opisu przejść fazowych w płynach van der Waalsa. W pracach [10], [11] udowadnia się istnienie przejść fazowych typu para-ciecz i ciecz-para opisywanych falami biegnącymi. Wykazuje się monotoniczność profilu rozpatrywanych fal ([11]) oraz znajduje się przybliżone wyrażenie na prędkość frontów i porównuje się je z odpowiednim wyrażeniem otrzymanym w przybliżeniu hydrodynamicznym ([11]). Z matematycznego punktu widzenia problemy poszukiwania fal biegnących są w tym przypadku bardzo ciekawe, gdyż stany asymptotyczne fali zależą tutaj od wartości prędkości propagacji poprzez tzw. relacje Rankina–Hugoniota, które wyrażają globalne zasady zachowania. Powoduje to pewne formalne trudności w stosowaniu zarówno twierdzenia o funkcji uwikłanej ([10]), jak i teorii indeksu Conleya ([11]). W przypadku obydwu prac otrzymane rozwiązanie jest perturbacją tzw. rozwiązania równowagowego Maxwella. Istnienie i monotoniczność przejść fazowych w zastosowanym modelu może być uważane za pozytywny sprawdzian jego poprawności. Dla prostoty rozpatruje się tutaj przypadek jednowymiarowy przestrzennie. Niech n oznacza liczbową gęstość cząstek gazu, a u jego prędkość. Wtedy równania rozpatrywanego modelu mają następującą postać:

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} w - \frac{\partial}{\partial X} u = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1-u^2}{2w} \left(1 + \frac{b}{w} \rho \right) - \frac{a}{w^2} + \frac{q}{2} \right] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{b^2 \rho}{4w^3} \frac{\partial}{\partial X} u \right] \\ + \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{5}{w^6} \left(\frac{\partial}{\partial X} w \right)^2 - \frac{2}{w^5} \frac{\partial^2}{\partial X^2} w \right],$$

$$(12) \quad w \frac{\partial}{\partial t} q - 2u \frac{\partial}{\partial X} q + \frac{1-u^2}{w} \frac{\partial}{\partial X} u = -\frac{4\rho}{\varepsilon} q,$$

gdzie

$$\rho = \rho(w) = h \left(\frac{1}{w} \right).$$

W powyższych równaniach t jest zmienną czasową, X jest (jednowymiarową) współrzędną Lagrange'a, w jest objętością właściwą ($w = 1/n$), u jest prędkością cieczy w kierunku X , q zaś jest dodatkową wielkością wynika-

jącą z modelu, nie mającą bezpośredniej interpretacji fizycznej. a , b , α oraz ε są dodatnimi stałymi charakteryzującymi płyn. Parametr ten może być utożsamiany z liczbą Knudsena, tzn. ze stosunkiem średniej drogi swobodnej cząsteczek do najmniejszej skali liniowej charakteryzującej układ. W większości przypadków można założyć, że $\varepsilon \ll 1$. Odzwierciedla to fakt ostrego przejścia fazowego para-ciecz.

Parametr ε wchodzi do definicji fali biegnącej układu (10)–(12). Jest to więc rozwiązanie postaci

$$(13) \quad (w, u, q)(X, t) = (w, u, q)(\xi), \quad \xi = \frac{X - ct}{\varepsilon} \in \mathbb{R}^1,$$

gdzie $c = \text{const}$ jest prędkością fali, przy czym

$$(14) \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (w, u, q)(\xi) = (w_l, u_l, 0),$$

$$(15) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (w, u, q)(\xi) = (w_r, u_r, 0),$$

$$(16) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (w', u', q')(\xi) = (0, 0, 0),$$

$$(17) \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (w'', u'')(\xi) = (0, 0, 0),$$

Symbol $'$ oznacza tutaj różniczkowanie względem ξ . Podstawienie postaci (13) do układu (10)–(12), jednokrotne scałkowanie względem ξ i zamiana na układ pierwszego rzędu prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$(18) \quad \begin{aligned} w' &= z, \\ z' &= -\frac{1}{A(w)} \left[\frac{1}{2} A'_w(w) z^2 + \frac{cb^2 \rho(w)}{4w^3} z + f(w; w_l, u_l, c) + \frac{1}{2} q \right], \end{aligned}$$

$$(19) \quad \begin{aligned} q' &= -c \frac{1 - (u_l - c(w - w_l))^2}{w(2(u_l + cw_l) - cw)} z + \frac{4\rho(w)}{2(u_l + cw_l) - cw} q, \\ f(w; w_l, u_l, c) &= c^2(w - w_l) + p(w, u_l - c(w - w_l)) - p(w_l, u_l), \end{aligned}$$

gdzie

$$(20) \quad p(w, u) = \frac{1 - u^2}{2(w - b)} - \frac{a}{w^2}$$

jest ciśnieniem, a $A(w) = 2\alpha/w^5$. Stałe w_l , w_r oraz prędkość c spełniają następujące relacje Rankina–Hugoniota:

$$(21) \quad \begin{aligned} cw_r + u_r &= cw_l + u_l, \\ -cu_r + p(w_r, u_r) &= -cu_l + p(w_l, u_l) \end{aligned}$$

oraz

$$(22) \quad u = u_l - c(w - w_l).$$

Jeśli $c = 0$, to $u = u_l = u_r$, tak więc przy zadanym w_l, w_r spełnia drugie z równań (21), czyli

$$p(w_r, u_r) = p(w_l, u_l).$$

Co więcej, $q \equiv 0$ jest jedynym ograniczonym rozwiązaniem trzeciego z równań układu (18). W konsekwencji funkcja $w(\xi)$ spełnia równanie

$$(23) \quad \frac{1}{2}A(w)w'^2 + \int_{w_l}^w f(\zeta; w_l, u_l, 0) d\zeta = 0.$$

Wykorzystując warunki brzegowe $w(+\infty) = w_r$ oraz $w'(+\infty) = 0$, otrzymujemy warunki konieczne istnienia poszukiwanego rozwiązania:

$$(24) \quad F(w_M; w_m, u_l, 0) = \int_{w_m}^{w_M} [p(\zeta, u_l) - p(w_m, u_l)] d\zeta = 0,$$

$$(25) \quad p(w_M, w_m) = p(w_m, u_l).$$

Warunek (24) nosi nazwę reguły równych pól Maxwella dla równowagowych przejść fazowych. Istnieje tylko jedna para liczb $w_m, w_M, b < w_m < w_M$, spełniająca warunki (24), (25), przy odpowiednio dobranym $u_l = u_{l0}$. Liczby te noszą nazwę *stanów Maxwellowskich*, a rozwiązanie łączące te stany (znalezione na podstawie układu dwóch pierwszych równań (18) z $q \equiv 0$) nosi nazwę *rozwiązania Maxwellowskiego*.

Dysponując tak zdefiniowanym rozwiązaniem i wykorzystując twierdzenie o funkcji uwikłanej lub teorię indeksu Conleya (omówioną pokrótce w rozdziale 2), możemy znaleźć rozwiązania opisujące przejścia fazowe dla stanów początkowych i końcowych różnych od stanów Maxwellowskich. Dla rozwiązań takich prędkość fali jest już na ogół różna od zera. W pracy [10] podstawowym narzędziem matematycznym jest twierdzenie o funkcji uwikłanej. Udowadnia się w niej, że dla (u_l, w_l, w_r) z pewnego otoczenia (u_{l0}, w_m, w_M) możemy znaleźć dokładnie jedno $c = c(u_l, w_l, w_r)$ takie, że istnieje rozwiązanie układu (18)–(20) spełniające warunki brzegowe postaci (14)–(17). Słuszne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([10], Theorem 2). *Dla dostatecznie małych, lecz dodatnich wartości $|u_l|$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla $w_l \in [w_m - \varepsilon, w_m + \varepsilon]$ istnieją jednoznacznie określone funkcje $c = c(w_l)$ oraz $w_r = w_r(w_l)$ klasy C^1 takie, że $c(w_m) = 0$, $w_r(w_m) = w_M$, oraz funkcje $w(\xi, w_l)$ oraz $q(\xi, w_l)$ klasy C^2 zdefiniowane na zbiorze $\mathbb{R}^1 \times [w_m - \varepsilon, w_m + \varepsilon]$ spełniające układ (18) dla $c = c(w_l)$.*

Twierdzenie to jest wnioskiem z bardziej ogólnego twierdzenia 1 na str. 559 pracy [10]. W jego dowodzie wykorzystuje się rezultaty teorii dychotomii eksponencjalnej ([24]).

Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, można również określić zwrot prędkości fali w zależności od lewego stanu asymptotycznego.

TWIERDZENIE 2 ([10], Corollary, str. 566). *Prędkość granicy fazowej c jest dodatnia, jeśli $w_l < w_m$ (kondensacja) lub $w_l > w_M$ (parowanie).*

Prędkość granicy fazowej c jest ujemna, jeśli $w_l > w_m$ (parowanie) lub $w_l < w_M$ (kondensacja). ■

Twierdzenie o funkcji uwikłanej pozwala zatem efektywnie przeanalizować zależność rozwiązań opisujących przejścia fazowe i prędkości granic fazowych w zależności od parametrów, jeśli tylko pozostają one dostatecznie blisko wartości odpowiadających zdefiniowanemu wyżej rozwiązaniu otrzymanemu poprzez zastosowanie reguły równych pól. Co więcej, wiemy, że otrzymane rozwiązania są jedyne w naturalnej klasie funkcji klasy BC^k .

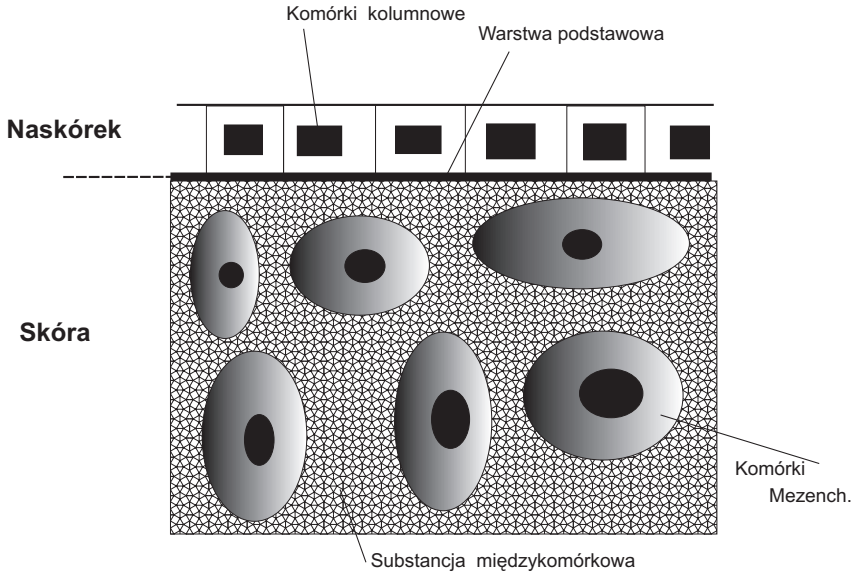
Choć metoda ta dostarcza nam formalnie ciągu kolejnych przybliżeń zaburzonego rozwiązania, to jednak udowodnienie monotoniczności funkcji $w(\xi, w_l)$ wymagałoby dodatkowego nakładu pracy. Własność monotoniczności przejścia fazowego jest bardzo ważna z fizycznego punktu widzenia, jej udowodnienie może zatem świadczyć o poprawności przyjętego modelu.

W pracy [11] używa się innej metody do rozwiązania problemu istnienia i własności fal biegnących opisujących przejścia fazowe. Metodą tą jest teoria indeksu Conleya. Zasadniczym problemem, jaki napotyka się przy jej stosowaniu, jest dobór odpowiedniego otoczenia izolującego. W przypadku rozważanego układu najwygodniej jest dobrać otoczenie izolujące w ten sposób, aby, pomijając małe otoczenia punktów singularnych, zbiór ten leżał całkowicie w zbiorze $\{(w, z, q) : z \geq 0\}$, gdzie z jest zmienną odpowiadającą pochodnej w' . W pracy [11] konstruuje się otoczenie izolujące dla przypadku $w_l > w_m$ (parowanie) lub $w_l < w_M$ (kondensacja) oraz $c < 0$. Formuluje się też w niej odpowiednie twierdzenia odnoszące się do przypadku $c > 0$. Twierdzenia te zostały udowodnione we wcześniejszej pracy [25].

4. Fale biegnące w pewnych problemach biologicznych

Morfogeneza skóry. W pracy [12] rozpatruje się problem istnienia fal biegnących w modelu morfogenezy skóry zaproponowanym przez Cruywagena i Murraya w pracy [26]. Rozwiązania tego typu mają zastosowanie w opisie zjawisk zachodzących w procesie gojenia się ran skóry. Wiadomo, że proces taki polega na pokrywaniu się rany naskórkiem, następnie zaś na odbudowywaniu właściwej tkanki skórnej poprzez uzupełnianie komórek w procesie mitozy. Podobne zjawiska zachodzą podczas morfogenezy skóry w procesie formowania się organizmu z zarodka. W modelu powyższym skóra traktowana jest jak ośrodek składający się z dwu warstw: naskórka oraz skóry właściwej. Warstwy te przedzielone są tzw. warstwą podstawową (zwaną również warstwą łączącą). Zasadnicze znaczenie w tym modelu odgrywa od-

działanie między naskórkiem a skórą właściwą odbywające się na drodze chemiczno-mechanicznej. Naprężenia w naskórku stymulują wydzielanie się substancji chemicznych, które wpływają na zachowanie się komórek skóry właściwej. Odwrotnie, substancje chemiczne wydzielane przez komórki skóry właściwej przenikają do naskórka, wywołując w nim naprężenia. Naskórek modelowany jest jako lepko-sprężyste kontinuum przymocowane do warstwy podstawowej.



Rys. 4. Model skóry Murraya-Cruywagena (wizja artystyczna)

Przy zaniedbaniu sił bezwładności (mała liczba Reynoldsa) równanie równowagi sił w naskórku przyjmuje postać:

$$(26) \quad \nabla \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{siły sprężyste} \\ \frac{E}{1+\nu} \left[\eta - \beta_1 \nabla^2 \eta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\theta - \beta_2 \nabla^2 \theta) \mathbf{I} \right] \\ \\ \left. \begin{array}{l} \text{siły lepkości} \\ + \mu_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{I} + \text{trakcja} \\ \tau s \mathbf{I} \end{array} \right\} = \underbrace{\rho \mathbf{u}}_{\text{siły objętościowe}},$$

gdzie t jest czasem, \mathbf{x} położeniem, E jest modułem Younga, ν stałą Poissona, $\beta_1 = \text{const}$, $\beta_2 = \text{const}$, \mathbf{I} macierzą jednostkową stopnia 2×2 , τ parametrem charakteryzującym siłę trakcji, ρ jest dodatnią stałą charakteryzującą siłę, z jaką naskórek przymocowany jest do warstwy podstawowej, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ jest

przemieszczeniem punktu materialnego naskórka, $s(\mathbf{x}, t)$ jest koncentracją związku chemicznego produkowanego w skórze właściwej,

$$\eta = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

jest tensorem naprężeń, a $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ jest dylatacją.

Komórki naskórka poruszają się wyłącznie wskutek konwekcji. Tak więc równanie ich ruchu ma postać

$$(27) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = - \overbrace{\nabla \cdot \left(N \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)}^{\text{konwekcja}}.$$

Lokalna gęstość komórek naskórka zmienia się wskutek procesów dyfuzyjnych (migracyjnych), chemotaksji oraz wskutek produkcji komórek (mitozy). Jest ona zatem opisywana równaniem

$$(28) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \overbrace{\nabla \cdot (d(N, n) \nabla n)}^{\text{dyfuzja}} - \overbrace{\alpha \nabla \cdot (n \nabla e)}^{\text{chemotaksja}} + \overbrace{m(n)}^{\text{mitoza}}.$$

d jest tutaj współczynnikiem dyfuzji zależnym w ogólności od N i n ; α jest współczynnikiem chemotaksji, $e(\mathbf{x}, t)$ koncentracją związku chemicznego produkowanego w skórze właściwej, a $m(n)$ funkcją opisującą mitozę spełniającą warunki

$$m(0) = m(1) = 0.$$

Równania (26)–(28) należy uzupełnić zbiorem równań stanu definiujących funkcje $s(N, n)$, $d(N, n)$, $e(N, n)$ oraz $m(n)$. Funkcje te muszą spełniać jedynie pewne ogólne warunki będące konsekwencją specyfiki rozpatrywanego problemu.

Poszukiwanie rozwiązań w postaci fal biegnących

$$(\mathbf{u}, N, n)(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, N, n)(\xi), \quad \xi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - ct,$$

gdzie $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ jest (jednostkowym) wektorem propagacji, a $c \in \mathbb{R}^1$ prędkością fali, doprowadza nas do układu równań różniczkowych zwyczajnych, który możemy zapisać w postaci

$$(29) \quad \beta \theta^{IV} + \mu c \theta''' - \theta'' + \rho \theta + \tau P(n, n', \theta, \theta', \theta'', t''') = 0,$$

$$(30) \quad n'' + R(c, \theta, \theta', \theta'', \theta''', n, n') = 0.$$

(Z równania (27) wynika, że $N(\xi)$ wyraża się jednoznacznie przez $\theta(\xi)$, dokładniej $N(\xi) = C_N - N(\xi)\theta(\xi)$, gdzie C_N jest stałą całkowania.) Szczegółową postać współczynników R i P można odtworzyć przez porównanie z równaniami (26)–(28). Interesujemy się rozwiązaniami spełniającymi warunki

$$n'(\pm\infty) = \theta'(\pm\infty) = \theta''(\pm\infty) = \theta'''(\pm\infty) = 0$$

oraz

$$(n(-\infty), \theta(-\infty)) = (1, 0), \quad (n(\infty), \theta(\infty)) = (0, 0).$$

W pracy [12] udowodniono istnienie powyżej zdefiniowanych rozwiązań, zakładając małość współczynnika τ . Przyjmuje się zatem, że wpływ morfogenu wydzielanego przez komórki skóry powoduje stosunkowo małe naprężenia naskórka. W konsekwencji rozwiązanie heterokliniczne dla układu (29), (30) z niezerowym τ możemy traktować jako perturbację rozwiązań heteroklinicznych postaci

$$(n, \theta)(\xi) = (n_0(\xi), 0),$$

gdzie n_0 jest rozwiązaniem heteroklinicznym równania

$$(31) \quad (a(n)n')' + cn' + m(n) = 0.$$

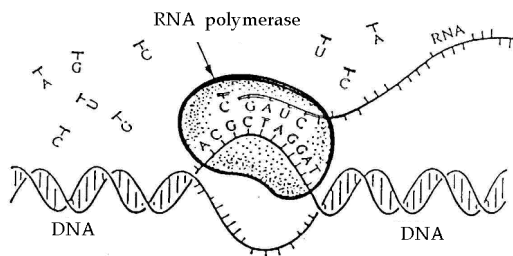
Dokładniej, udowadnia się, że

1. dla dostatecznie małych $\tau > 0$ istnieje prędkość minimalna $c^*(\tau)$, tzn. dla wszystkich $c \geq c^*(\tau)$ istnieją zdefiniowane wyżej połączenia heterokliniczne takie, że $n(\xi; \tau) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^1$.
2. dla wszystkich $c < c^*(\tau)$ dostatecznie bliskich $c^*(\tau)$ rozwiązania heterokliniczne (o ile istnieją) nie spełniają warunku $n(\xi; \tau) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Dla wszystkich $c \geq c^*(\tau)$ otrzymane rozwiązania mają zatem sens fizyczny, gdyż gęstość komórek skóry właściwej jest nieujemna.

Istnienie fal biegnących w rozważanym modelu w przypadku innego skalowania zostało również przeanalizowane w pracy [27].

Rozwiązania homokliniczne w modelu DNA. Problem rozpatrywany w pracy [13] ma swoje źródło w procesie transkrypcji DNA. W czasie trwania tego procesu łańcuch DNA musi ulec lokalnemu rozkręceniu, aby jedno jego pasmo mogło służyć jako wzorzec. Takie lokalne rozkręcenie i towarzysząca mu zmiana odległości między sąsiednimi parami zasad może być uważane za falę homokliniczną poruszającą się wzdłuż łańcucha. W pracy udowadnia się, że fale takie mogą istnieć, nawet przy uwzględnieniu dyssypacji energii, spowodowanej nieelastycznością łańcucha, jeśli tylko położenie polimerazy RNA (będącej dodatkowym źródłem energii w układzie) w stosunku do frontu fali rozkręcenia jest odpowiednio dobrane. Istotne jest zatem zbadanie stabilności strukturalnej rozwiązań homoklinicznych względem perturbacji nieautonomicznych. Oddziaływanie polimerazy z łańcuchem opisywane jest



Rys. 5. Transkrypcja RNA ([29])

przez funkcje o zwartym nośniku. Parametrem zagadnienia jest przesunięcie polimerazy względem frontu fali niezaburzonej. Rezultaty tej pracy są rozszerzeniem na przypadek układów rezultatów pracy [28] dotyczącej równania skalarnego.

W pracy [13] rozpatruje się układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu postaci

$$(32) \quad x''(t) = F(x(t)),$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ a $t \in \mathbb{R}^1$. W przypadku rozważanego modelu cząsteczki DNA, x_1 oraz x_2 opisują lokalne odchylenia kąta skręcenia i odległości między kolejnymi zasadami od ich wartości równowagowych.

Założmy, że $F(0) = 0$ i że (32) ma rozwiązanie homokliniczne $\gamma : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\gamma(t) \rightarrow 0$ oraz $\gamma'(t) \rightarrow 0$ dla $|t| \rightarrow \infty$.

Układ (32) zaburzamy (nieautonomicznie) do postaci

$$(33) \quad x''(t) = F(x(t)) - \delta \mathcal{D}x'(t) + \mu \psi(x(t), x'(t), t + T),$$

gdzie $\delta, \mu \in \mathbb{R}^1$, $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest dostatecznie gładką funkcją o zwartym nośniku, a \mathcal{D} jest macierzą diagonalną $n \times n$ o wyrazach dodatnich d_1, \dots, d_n . Człon $\delta \mathcal{D}x'(t)$ opisuje wspomniane wyżej procesy dyssypacyjne, a $\mu \psi(x(t), x'(t), t + T)$ modeluje oddziaływanie polimerazy z łańcuchem DNA. Parametr $T \in \mathbb{R}^1$ odpowiada położeniu polimerazy względem frontu fali niezaburzonej. W pracy udowadnia się, że dla wszystkich dostatecznie małych $|\mu| \geq 0$ i dla wszystkich dostatecznie małych $|\delta|$ można znaleźć skończone T takie, że układ (33) będzie posiadał w dalszym ciągu rozwiązania homokliniczne zależne w sposób ciągły od parametru μ .

Cytowana literatura

- [1] J. Sneyd, *Calcium oscillations and waves*, w: Proc. Sympos. Appl. Math. 59, AMS, Providence, 2002, 83–118.
- [2] J. Keener, J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer, 1998.

- [3] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, N. S. Piskunov, *A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter and its application to a biological problem*, Byul. Moskovs. Gos. Univ. 1 (1937), 1–26.
- [4] P. C. Fife, J. B. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1975), 335–361.
- [5] P. C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Lecture Notes in Biomath. 28, Springer, 1979.
- [6] A. Volpert, V. Volpert, V. Volpert, *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*, AMS, Providence, 1994.
- [7] B. Kaźmierczak, *Approximating sequences for heteroclinic orbits*, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994), 71–76.
- [8] B. Kaźmierczak, *Existence of travelling wave solutions for reaction-diffusion convection systems via the Conley index theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 17 (2001), 359–403.
- [9] B. Kaźmierczak, *Travelling waves in a system modelling laser sustained plasma*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 51 (2000), 304–314.
- [10] B. Kaźmierczak, K. Piechór, *Parametric dependence of phase boundary solution to model kinetic equations*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 53 (2002), 539–568.
- [11] B. Kaźmierczak, K. Piechór, *Phase boundary solutions to model kinetic equations via the Conley index theory. Part II*, Math. Comp. Modelling 36 (2002), 1393–1408.
- [12] B. Kaźmierczak, K. Piechór, *Some heteroclinic solutions of a model of skin pattern formation*, Math. Methods Appl. Sci. 27 (2004), 1317–1345.
- [13] B. Kaźmierczak, T. Lipniacki, *Homoclinic solutions in mechanical systems with small dissipation. Application to DNA dynamics*, J. Math. Biol. 44 (2002), 309–329.
- [14] A. Baranowski, Z. Mucha, Z. Peradzyński, *Niestabilności ciągłego wyładowania optycznego w gazach*, Adv. Mech. 1 (1978).
- [15] P. Fife, J. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), 335–361.
- [16] E. C. M. Crooks, J. F. Toland, *Travelling waves for reaction diffusion convection systems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1998), 19–43.
- [17] K. Mischaikov, V. Hutson, *Travelling waves for mutualist species*, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993), 987–1008.
- [18] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer, 1983.
- [19] D. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985), 1–41.
- [20] C. K. R. T. Jones, *Geometric singular perturbation theory*, w: Dynamical Systems (Montecatini Terme, 1994), Lecture Notes in Math. 1609, Springer, 1995, 45–118.
- [21] C. K. R. T. Jones, N. Kopell, *Tracking invariant manifolds with differential forms in singularly perturbed systems*, J. Diff. Equations 108 (1994), 64–88.
- [22] K. Piechór, *Discrete velocity models of the Enskog–Vlasov equation*, Transport Theory Statist. Phys. 23 (1994), 39–74.
- [23] K. Piechór, *A four velocity model for van der Waals fluids*, Arch. Mech. 47 (1995), 1089–1111.
- [24] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies and transversal homoclinic points*, J. Diff. Equations 55 (1984), 225–256.
- [25] B. Kaźmierczak, K. Piechór, *Phase boundary solutions to model kinetic equations via the Conley index theory. Part I*, Math. Comp. Modelling 31 (2000), 77–92.
- [26] G. C. Cruywagen, J. D. Murray, *On a tissue interaction model for skin pattern formation*, J. Nonlinear Sci. 2 (1992), 217–240.

- [27] S. Ai, *Existence of travelling wave solutions in a tissue interaction model for skin pattern formation*, J. Nonlinear Sci. 13 (2003), 193–210.
- [28] T. Lipniacki, *Chemically driven traveling waves in DNA*, Phys. Rev. E 60 (1999), 7253–7261.
- [29] C. R. Calladine, H. R. Drew, *Understanding DNA*, Academic Press, New York, 1992.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN
Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa

Abstract. We discuss the travelling wave solutions to equations modelling nonlinear media with diffusion. Such solutions may describe, e.g., propagation of heteroclinic fronts or impulses (medium excitations). We present several examples of processes where the notion of the travelling wave is especially useful, including plasma sustained by a laser beam, phase changes in van der Waals fluids, skin morphogenesis and DNA-RNA transcription process.

Key words: heteroclinic and homoclinic travelling waves, Conley index, singular perturbations, laser plasma, phase changes, skin morphogenesis, DNA-RNA transcription.