MATEMATYKA STOSOWANA 5, 2004

Jerzy Muszyński (Warszawa)

O pewnej zunifikowanej metodzie rozwiązywania równań liniowych o stałych współczynnikach

1. Wstęp. Celem pracy jest omówienie zunifikowanej metody rozwiązywania wybranych zagadnień analizy i algebry. Są to te zagadnienia, przy których korzystamy z równań charakterystycznych. Zajmiemy się tu zagadnieniami początkowymi dla równań różnicowych

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = b(n),$$

równań różniczkowych

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

układów równań różniczkowych

$$y' = Ay + b(x),$$

jak również zadaniami, w których dla danej macierzy A poszukujemy pewnych jej funkcji, na przykład wielomianu, e^A, $\sin A$ lub funkcji typu $x \mapsto e^{Ax}$, $\sin Ax$.

W pracy zakłada się, że Czytelnikowi znane są podstawowe wiadomości z analizy i algebry, a w szczególności twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych dla równań różnicowych, różniczkowych i ich układów (por. np. [1]) oraz pewne twierdzenia z algebry liniowej (por. np. [2]).

Na zakończenie pracy w uwagach dydaktycznych zasugerujemy, jak bez sięgania do ogólnej teorii równań różnicowych i różniczkowych można wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązań rozpatrywanych zagadnień oraz zbadać pewne inne ich własności.

W pracy zajmować się będziemy zarówno równaniami o zmiennych zespolonych, jak i rzeczywistych. Przez K będziemy oznaczać zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ bądź rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Rozpoczniemy od równań jednorodnych.

1.1. *Równanie różnicowe.* Niech dane będzie jednorodne równanie różnicowe liniowe o stałych współczynnikach (z K)

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0.$$

Niech X będzie przestrzenią wektorową ciągów (o wartościach z K), a $X_0 \subset X$ zbiorem rozwiązań podanego równania różnicowego.

W przestrzeni X rozważmy operator D, który elementowi y_k danego ciągu $(y_n) \in X$ przypisuje następny element tego ciągu:

$$Dy_k = y_{k+1}.$$

Jeżeli (y_n) jest rozwiązaniem równania różnicowego, to

$$D^p y_n + a_{p-1}D^{p-1}y_n + \cdots + a_1 D y_n + a_0 y_n = 0,$$

lub

$$(D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \cdots + a_1 D + a_0 E)y_n = 0,$$

gdzie E jest operatorem tożsamościowym.

Jeżeli (y_n) jest rozwiązaniem równania różnicowego ($(y_n) \in X_0$), to na jego elementach spełnione jest zatem równanie operatorowe

$$D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \cdots + a_1 D + a_0 E = \Theta, \tag{1}$$

gdzie Θ jest operatorem zerowym ($\Theta y_n = 0$ dla dowolnych $y_n \in K$).

1.2. *Równanie różniczkowe.* Niech $a_0, \ldots, a_{p-1} \in K$. Rozważmy równanie

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Niech funkcja $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, będzie jego rozwiązaniem ($y(x) \in K$ dla $x \in \mathbb{R}$). Oznacza to, że funkcja y jest klasy $C^p(\mathbb{R})$ i

$$y^{(p)}(x) + a_{p-1}y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Wykażemy, że funkcja ta jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna ($y \in C^\infty(\mathbb{R})$). Z podanego wyżej równania mamy dla $x \in \mathbb{R}$

$$y^{(p)}(x) = -a_{p-1}y^{(p-1)}(x) - \cdots - a_1 y'(x) - a_0 y(x).$$

Funkcja y jest klasy $C^p(\mathbb{R})$. Prawa strona tej tożsamości jest różniczkowalna, a stąd i lewa, zatem y jest klasy $C^{p+1}(\mathbb{R})$. Po zróżniczkowaniu ostatniego wzoru otrzymujemy

$$y^{(p+1)}(x) = -a_{p-1}y^{(p)}(x) - \cdots - a_1 y''(x) - a_0 y'(x).$$

Prawa strona jest znów różniczkowalna, taka też jest więc i lewa. Oznacza to, że funkcja y jest klasy $C^{p+2}(\mathbb{R})$. Kontynuując tę procedurę, dowodzimy, że rozwiązanie y jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$.

Oznaczmy przez X przestrzeń $C^\infty(\mathbb{R})$, a przez X_0 zbiór rozwiązań rozpatrywanego równania; mamy więc $X_0 \subset X$. Niech D będzie operatorem różniczkowania w przestrzeni X

$$Dy = y'.$$

Wtedy rozwiązanie $y \in X_0$ spełnia równość

$$D^p y(x) + a_{p-1} D^{p-1} y(x) + \cdots + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = 0,$$

czyli

$$(D^p + a_{p-1} D^{p-1} + \cdots + a_1 D + a_0 E) y(x) = 0.$$

Stąd na rozwiązaniach równania różniczkowego (w zbiorze X_0) spełnione jest równanie operatorowe (1).

1.3. *Macierze.* Niech dana będzie macierz kwadratowa $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} \in K$ dla $i, j = 1, \ldots, n$. Równanie $\det(\lambda E - A) = 0$ nazywa się równaniem charakterystycznym. Ma ono postać

$$\lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0 = 0.$$

Wobec twierdzenia Cayleya–Hamiltona macierz A spełnia to równanie, a więc

$$A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 E = 0,$$

gdzie E jest macierzą jednostkową, a 0 jest macierzą zerową.

Macierz A może też spełniać inne równanie niż równanie charakterystyczne, na przykład tzw. równanie minimalne.

Na przykład równanie $A^2 - E = 0$ spełnia macierz jednostkowa E dowolnego skończonego stopnia lub przeliczalna. Podobnie spełniają je macierze:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

czy też macierz nieskończona

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

W pracy rozważać będziemy macierze spełniające równanie skończonego stopnia, a więc skończone, oraz wybrane nieskończone.

Niech więc macierz A spełnia równanie

$$A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0.$$

Równanie takie będziemy nazywać *zerującym.*

Niech X będzie przestrzenią wektorową macierzy kwadratowych pewnego stopnia n lub nieskończonych, a $X_0 \subset X$ zbiorem macierzy spełniających podane wyżej równanie zerujące.

Macierz A można traktować jako odwzorowanie liniowe D w przestrzeni wektorowej X (gdy $x \in X$, to $Ax \in X$), a wtedy $D = A$ i dla macierzy$A$ spełniających równanie zerujące ($A \in X_0$) równanie to przybiera postać (1).

1.4. *Układ równań różniczkowych.* Niech dany będzie skończony lub przeliczalny układ równań różniczkowych

$$y' = Ay, \tag{2}$$

w którym macierz A spełnia równanie zerujące

$$A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0.$$

Jeżeli funkcja wektorowa $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, jest rozwiązaniem równania (2), to rozumując podobnie jak dla równania różniczkowego, dowodzi się, że funkcja ta jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$.

W przestrzeni wektorowej funkcji $X = C^\infty(\mathbb{R})$ wprowadźmy operator D jako operator różniczkowania

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Wtedy rozpatrywany układ zapiszemy w postaci

$$Dy = Ay.$$

Jeżeli X_0 jest zbiorem rozwiązań tego układu ($X_0 \subset X$), to dla $y \in X_0$ mamy

$$D = A,$$

a wtedy na zbiorze X_0 równanie zerujące przybiera postać (1).

2. Rozważania ogólne

2.1. *Wyprowadzenie wzoru na operator D^n.* Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech D będzie operatorem liniowym w X. Przez E oznaczać będziemy operator tożsamościowy w X, a przez $aD + bE$ dla $a, b \in K$ taki operator w X, że dla każdego $\varphi \in X$

$$(aD + bE)\varphi = aD\varphi + b\varphi.$$

Przez D^k będziemy oznaczać k-krotne złożenie operatora D. Wtedy złożenia operatorów podlegają prostym regułom mnożenia, na przykład

$$D(aD + bE) = aD^2 + bD.$$

Niech w pewnym podzbiorze $X_0 \subset X$ operator D spełnia dla pewnego $p \in \mathbb{N}$, pewnych stałych $a_{p-1}, \ldots, a_1, a_0 \in K$ i dowolnych $y \in X_0$ równanie

$$D^p y + a_{p-1}D^{p-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 Ey = 0_X, \tag{3}$$

gdzie 0_X jest elementem zerowym w X. Wtedy operator D spełnia w X_0 równanie operatorowe

$$D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \cdots + a_0 E = \Theta, \tag{4}$$

gdzie Θ jest operatorem zerowym w X ($\Theta y = 0_X$ dla każdego $y \in X$).

Odpowiadające równaniu (4) równanie algebraiczne (dla $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0 = 0$$

będziemy nazywać *zerującym*, a jego pierwiastki *zerującymi*.

Ze wzoru (4) wynika, że w X_0

$$D^p = -a_{p-1}D^{p-1} - \cdots - a_0 E,$$

a więc D^p można wyrazić jako kombinację liniową operatorów $D^{p-1}, \ldots D, E$.

Mnożąc ostatnią równość przez D, otrzymamy

$$D^{p+1} = -a_{p-1}D^p - \cdots - a_0 D,$$

a więc D^{p+1} można wyrazić jako kombinację liniową $D^p, \ldots, D$. Ale D^p można wyrazić jako kombinację liniową $D^{p-1}, \ldots, D, E$, a zatem również D^{p+1} można wyrazić jako kombinację $D^{p-1}, \ldots, D, E$. Powtarzając to rozumowanie, dowodzimy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ operator D^n w X_0 można wyrazić jako kombinację liniową $D^{p-1}, \ldots, D, E$. Znajdźmy współczynniki tej kombinacji.

Dzieląc, jak to się czyni w algebrze, w przestrzeni X „wielomian" D^n przez „wielomian" $D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \cdots + a_0 E$, otrzymamy dla pewnej funkcji φ i stałych $\overset{n}{a}_{p-1}, \ldots, \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0 \in K$

$$\begin{aligned} D^n &= \varphi(D)(D^p + a_{p-1}D^{p-1} + \cdots + a_0 E) \\ &\quad + \overset{n}{a}_{p-1}D^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1 D + \overset{n}{a}_0 E \end{aligned} \tag{5}$$

lub zastępując D przez λ

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \varphi(\lambda)(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0) \\ &\quad + \overset{n}{a}_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1 \lambda + \overset{n}{a}_0. \end{aligned}$$

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ będą pierwiastkami zerującymi o krotnościach odpowiednio $k_1, \ldots, , k_s$, a więc

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Podane wyżej równanie można zatem przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \lambda^n &= \varphi(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \\ &\quad + \overset{n}{a}_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1 \lambda + \overset{n}{a}_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Do równości tej i jej odpowiednich pochodnych będziemy podstawiać w miejsce λ liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ w sposób następujący: jeżeli λ_i jest jedną z tych liczb krotności k_i, to do równania (6) i pochodnych tego równania do rzędu

$k_i - 1$ podstawimy $\lambda = \lambda_i$. Postępując w ten sposób, otrzymujemy układ p równań z p niewiadomymi $\overset{n}{a}_{p-1}, \ldots, \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0$:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\lambda_1^n & = \overset{n}{a}_{p-1}\lambda_1^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1\lambda_1^1 + \overset{n}{a}\lambda_1^0, \\
(\lambda_1^n)' & = \overset{n}{a}_{p-1}(\lambda_1^{p-1})' + \cdots + \overset{n}{a}_1(\lambda_1^1)' + \overset{n}{a}_0(\lambda_1^0)' \ , \\
\ldots & \ldots\ldots \\
(\lambda_1^n)^{(k_1-1)} & = \overset{n}{a}_{p-1}(\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} + \cdots + \overset{n}{a}_1(\lambda_1^1)^{(k_1-1)} + \overset{n}{a}_0(\lambda_1^0)^{(k_1-1)}, \\
\ldots & \ldots\ldots \\
\lambda_s^n & = \overset{n}{a}_{p-1}\lambda_s^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1\lambda_s^1 + \overset{n}{a}_0\lambda_s^0, \\
\ldots & \ldots\ldots \\
(\lambda_s^n)^{(k_s-1)} & = \overset{n}{a}_{p-1}(\lambda_s^{p-1})^{(k_s-1)} + \cdots + \overset{n}{a}_1(\lambda_s^1)^{(k_s-1)} + \overset{n}{a}_0(\lambda_s^0)^{(k_s-1)},
\end{cases}
$$

w którym $(\lambda_i^r)^{(k)}$ oznacza $(\lambda^r)^{(k)}|_{\lambda=\lambda_i}$.

Oznaczmy macierz współczynników tego układu przez Γ:

$$
(8)\qquad \Gamma = \begin{bmatrix}
\lambda_1^{p-1} & \lambda_1^{p-2} & \ldots & \lambda_1 & \lambda_1^0 \\
(\lambda_1^{p-1})' & (\lambda_1^{p-2})' & \ldots & (\lambda_1)' & (\lambda_1^0)' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_1^{p-2})^{(k_1-1)} & \ldots & (\lambda_1)^{(k_1-1)} & (\lambda_1^0)^{(k_1-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda_s^{p-1})^{(k_s-1)} & (\lambda_s^{p-2})^{(k_s-1)} & \ldots & (\lambda_s)^{(k_s-1)} & (\lambda_s^0)^{(k_s-1)},
\end{bmatrix}
$$

przez Λ_r wektor

$$\Lambda_r = [\lambda_1^r, (\lambda_1^r)', \ldots, (\lambda_1^r)^{k_1-1}, \ldots, \lambda_s^r, , \ldots, (\lambda_s^r)^{k_s-1}]^T,$$

a przez $\overset{n}{a}$ wektor

$$\overset{n}{a} = [\overset{n}{a}_{p-1}, \ldots \overset{n}{a}_1, \overset{n}{a}_0]^T.$$

Wtedy

$$\Gamma = [\Lambda_{p_{-1}}, \Lambda_{p-2}, \ldots, \Lambda_1, \Lambda_0]$$

i układ równań (7) przybiera postać

$$(9)\qquad \Lambda_n = \Gamma\,\overset{n}{a}.$$

Wobec związku (5) i równania (4), na elementach zbioru X_0 mamy

$$(10)\qquad D^n = \overset{n}{a}_{p-1}D^{p-1} + \cdots + \overset{n}{a}_1 D + \overset{n}{a}_0 E.$$

2.2. Twierdzenie.

$$\det \Gamma \neq 0.$$

Dowód. Niech $r(\lambda)$ będzie wektorem-wierszem

$$r(\lambda) = [\lambda^{p-1}, \lambda^{p-2}, \ldots, \lambda, 1].$$

Wtedy macierz $\varGamma$ można zapisać w postaci

$$\varGamma = \begin{bmatrix} r(\lambda_1) \\ r'(\lambda_1) \\ \dots \\ r^{(k_1-1)}(\lambda_1) \\ \dots \\ r(\lambda_s) \\ r'(\lambda_s) \\ \dots \\ r^{(k_s-1)}(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

Aby wykazać, że macierz $\varGamma$ jest nieosobliwa, wystarczy pokazać, że wektory

$$r(\lambda_1), r'(\lambda_1), \dots, r^{(k_1-1)}(\lambda_1), \dots, r(\lambda_s), r'(\lambda_s), \dots, r^{(k_s-1)}(\lambda_s)$$

są liniowo niezależne.

Niech istnieją takie stałe $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, s$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, że

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{l_i=0}^{k_i-1} a_{il_i} r^{(l_i)}(\lambda_i) = 0,$$

gdzie $r^{(0)} = r$. Ostatnie składowe wektorów $r(\lambda_i)$ są równe 1, gdy ostatnie składowe wektorów $r^{(l_i)}(\lambda_i)$ dla $l_i > 0$ są równe 0, zatem $\sum_{i=1}^{s} a_{i0} r(\lambda_i) = 0$. Gdyby nie wszystkie stałe a_{i0} były równe 0, to wektory

$$\begin{aligned} r(\lambda_1) &= [\lambda_1^{p-1}, \lambda_1^{p-2}, \dots, \lambda_1, 1], \\ &\dots \\ r(\lambda_s) &= [\lambda_s^{p-1}, \lambda_s^{p-2}, \dots, \lambda_s, 1] \end{aligned}$$

byłyby liniowo zależne, a wtedy wektory

$$\begin{aligned} &[\lambda_1^{s-1}, \lambda_1^{s-2}, \dots, \lambda_1, 1], \\ &\dots \\ &[\lambda_s^{s-1}, \lambda_s^{s-2}, \dots, \lambda_s, 1] \end{aligned}$$

byłyby również liniowo zależne, co nie jest możliwe, gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{s-1} & \lambda_1^{s-2} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_s^{s-1} & \lambda_s^{s-2} & \dots & \lambda_s & 1 \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem Vandermonde'a, różnym od zera przy naszych założeniach (pierwiastki λ_i są różne). Zatem wszystkie stałe a_{i0} są równe 0.

Podobnie dowodzi się, że stałe a_{i1}, stałe a_{i2} itd. są wszystkie równe zeru. Otrzymane w tych dowodach wyznaczniki są wyznacznikami Vandermonde'a mnożonymi przez pewne stałe różne od zera.

2.3. TWIERDZENIE. *Jeżeli współczynniki równania zerującego a_r, $r = p-1,\ldots,1,0$, są rzeczywiste, to liczby $\overset{n}{a}_i$, $i = p-1,\ldots,1,0$, $n \in \mathbb{N}$, są rzeczywiste.*

Dowód. Wobec wzoru (9) many $\Lambda_n = \Gamma\overset{n}{a}$, gdzie

$$\Gamma = [\Lambda_{p-1}, \Lambda_{p-2}, \ldots, \Lambda_1, \Lambda_0].$$

Stosując metodę Cramera, mamy tu $\overset{n}{a}_i = \det\Gamma_i/\det\Gamma$, gdzie macierz Γ_i otrzymujemy z macierzy Γ, zastępując jej $i+1$-szą kolumnę Λ_i przez Λ_n. Wtedy

$$\overline{\overset{n}{a}_i} = \frac{\det\overline{\Gamma}_i}{\det\overline{\Gamma}}.$$

Jeżeli któraś liczba λ_i, $i \in \{1,\ldots,s\}$, ma niezerową część urojoną, to wśród pozostałych λ_j, $j \in \{1,\ldots,s\}$, istnieje do niej sprzężona $\lambda_j = \overline{\lambda}_i$. Wynika stąd, że gdy w pewnych wierszach wyznaczników $\det\overline{\Gamma}_i$ i $\det\overline{\Gamma}$ występują wyrazy z niezerową częścią urojoną, to w tych wyznacznikach występują wiersze do nich sprzężone. Zamieniając między sobą jednocześnie wszystkie takie pary wierszy w $\det\overline{\Gamma}_i$ i $\det\overline{\Gamma}$, otrzymamy

$$\overline{\overset{n}{a}_i} = \frac{\det\overline{\Gamma}_i}{\det\overline{\Gamma}} = \frac{\det\Gamma_i}{\det\Gamma} = \overset{n}{a}_i.$$

2.4. LEMAT. *Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą kwadratową nieosobliwą stopnia n i niech $x = [x_1,\ldots,x_n]^T$, $y = [y_1,\ldots,y_n]^T$, $\gamma = [\gamma_1,\ldots,\gamma_n]$. Jeżeli $y = Ax$, to*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ \ldots \ a_{1n} & y_1 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ \ldots \ a_{nn} & y_n \\ \gamma_1 \ \ldots \ \gamma_n & \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Dowód. Niech c_k oznacza k-tą kolumnę macierzy A i niech

$$A_k = \begin{vmatrix} c_1 & \ldots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \ldots & c_n & y \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & x_k \end{vmatrix}.$$

Rozkładając ten wyznacznik względem ostatniego wiersza, otrzymujemy

$$(-1)^{n+k+1}|\, c_1 \ \ldots\ c_{k-1}\ c_{k+1}\ \ldots\ c_n\ y\,| \\ + (-1)^{2n+2}\det Ax_k \\ = (-1)|\, c_1\ \ldots\ c_{k-1}\ y\ c_{k+1}\ \ldots\ c_n\,| + \det Ax_k \\ = \det A\biggl(x_k - \frac{|\, c_1\ \ldots\ c_{k-1}\ y\ c_{k+1}\ \ldots\ c_n\,|}{\det A}\biggr) = 0;$$

ostatnia równość wynika ze wzoru Cramera na k-tą współrzędną x_k wektora x takiego, że $Ax = y$. Ale wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k A_k = 0,$$

co należało wykazać.

Zauważmy, że wzór (11) można zapisać w symbolicznej postaci

$$\begin{vmatrix} & y_1 \\ A & \ldots \\ & y_n \\ \gamma_1\ \ldots\ \gamma_n & \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n \end{vmatrix} = 0.$$

2.5. *Wzór na operator D^n.* Jak wiemy, $\det \varGamma \neq 0$. Ze wzorów (9), (10) i lematu 2.4 wynika, że w X_0 (zapis symboliczny)

$$\begin{vmatrix} \varGamma & \varLambda_n \\ D^{p-1}\ \ldots\ D\ E & D^n \end{vmatrix} = \varTheta,$$

gdzie $\varTheta$ jest operatorem zerowym w X, lub dokładniej

$$(12)\qquad \det \begin{bmatrix} \lambda_1^{p-1} & \lambda_1^{p-2} & \ldots\ 1 & \lambda_1^n \\ (\lambda_1^{p-1})' & (\lambda_1^{p-2})' & \ldots\ 0 & (\lambda_1^n)' \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ (\lambda_1^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_1^{p-2})^{(k_1-1)} & \ldots\ 0 & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ \lambda_s^{p-1} & \lambda_s^{p-2} & \ldots\ 1 & \lambda_s^n \\ (\lambda_s^{p-1})' & (\lambda_s^{p-2})' & \ldots\ 0 & (\lambda_s^n)' \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ (\lambda_s^{p-1})^{(k_1-1)} & (\lambda_s^{p-2})^{(k_1-1)} & \ldots\ 0 & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ D^{p-1} & D^{p-2} & \ldots\ E & D^n \end{bmatrix} = \varTheta.$$

Podaną wyżej równość można zapisać w postaci

$$
(13)\qquad \left|\begin{array}{cc} & \lambda_1^n \\ & (\lambda_1^n)' \\ & \dots \\ \Gamma & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & \dots \\ & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ D^{p-1}\ \dots\ D\ E & D^n \end{array}\right| = \Theta.
$$

2.6. *Umowa ogólna.* W następnych punktach $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ będą pierwiastkami równania

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

o krotnościach $k_1, \dots, k_s$, a Γ — macierzą określoną wzorem (8).

3. Równanie różnicowe

3.1. *Zagadnienie jednorodne*

Twierdzenie. *Niech dane będzie zagadnienie początkowe: równanie różnicowe jednorodne*

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

z danymi początkowymi $y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$. *Rozwiązanie* y_n *tego zagadnienia znajdujemy ze wzoru*

$$
(14)\qquad \left|\begin{array}{cc} & \lambda_1^n \\ & (\lambda_1^n)' \\ & \dots \\ \Gamma & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & \dots \\ & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ y_{p-1}\ \cdots\ y_1\ y_0 & y_n \end{array}\right| = 0.
$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

Dowód. Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora D danej wzorem $Dy_k = y_{k+1}$ oraz działając operatorami ostatniego wiersza na element y_0, otrzymujemy wzór

$$\left|\begin{array}{cc} & \lambda_1^n \\ & (\lambda_1^n)' \\ & \cdots \\ \Gamma & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & \cdots \\ & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ D^{p-1}y_0 \ \ldots \ Dy_0 \ y_0 & D^n y_0 \end{array}\right| = 0,$$

czyli wzór (14).

3.2. PRZYKŁAD. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad y_1 = 1.$$

Równaniem charakterystycznym jest tu

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

o pierwiastkach jednokrotnych

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązanie znajdujemy ze wzoru (14):

$$\det\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \lambda_1^n \\ \lambda_2 & 1 & \lambda_2^n \\ 1 & 1 & y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Mamy tu

$$y_n(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n) + (\lambda_2^n - \lambda_1^n) = 0,$$

a stąd

$$y_n = -\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Uzyskaliśmy tzw. ciąg *Fibonacciego.*

3.3. *Równanie niejednorodne*

TWIERDZENIE. *Niech dane będzie równanie niejednorodne*

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = b(n)$$

z zerowymi danymi początkowymi. Rozwiązanie y_n *tego zagadnienia znajdujemy ze wzoru*

$$\left|\begin{matrix} & \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_1^{n-k-1}b(k) \\ & \ldots \\ \Gamma & \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_1^{n-k-1})^{(k_1-1)}b(k) \\ & \ldots \\ & \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_s^{n-k-1})^{k_s-1}b(k) \\ 1\ 0\ \ldots\ 0 & y_n \end{matrix}\right| = 0. \tag{15}$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

Dowód. Rozwiązanie równania niejednorodnego, takie, że $y_0 = y_1 = \ldots = y_{p-1} = 0$, opisane jest wzorem

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{y}_{n-k-1}b(k), \tag{16}$$

gdzie $\widetilde{y}_n$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \cdots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0$$

z warunkami początkowymi $y_0 = y_1 = \cdots = y_{p-2} = 0$, $y_{p-1} = 1$. Rozwiązanie to można znaleźć ze wzoru

$$\left|\begin{matrix} & \lambda_1^n \\ & \ldots \\ \Gamma & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & \ldots \\ & (\lambda_s^n)^{k_s-1} \\ 1\ 0\ \ldots\ 0 & \widetilde{y}_n \end{matrix}\right| = 0.$$

Wobec wzoru (16) rozwiązanie y_n równania niejednorodnego można więc znaleźć z (15).

Uwaga. Przypominamy, że rozwiązaniem zagadnienia niejednorodnego z danymi warunkami początkowymi jest suma złożona z rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego z danymi warunkami początkowymi i rozwiązania równania niejednorodnego z zerowymi warunkami początkowymi.

Podobnie jest dla rozpatrywanych dalej równań różniczkowych (por. przytoczony w tym punkcie przykład) i ich układów.

4. Równanie różniczkowe

4.1. *Zagadnienie jednorodne*

TWIERDZENIE. *Niech dane będzie zagadnienie początkowe*:

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \ y^{(p-1)}(x_0) = y_{p-1}.$$

Rozwiązanie y tego zagadnienia znajdujemy ze wzoru

$$\text{(17)} \qquad \begin{vmatrix} & & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \ldots \\ & \Gamma & (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & & \ldots \\ & & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & & \ldots \\ & & (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ y_{p-1} \ \ldots \ y_1 \ y_0 & & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

Dowód. Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora D danej wzorem $Dy = y'$ oraz działając operatorami ostatniego wiersza na element $y(x)$, otrzymujemy wzór

$$\text{(18)} \qquad \begin{vmatrix} & & \lambda_1^n \\ & & \frac{d}{d\lambda}(\lambda_1^n) \\ & & \ldots \\ & \Gamma & \frac{d^{k_1-1}}{d\lambda^{k_1-1}}(\lambda_1^n) \\ & & \ldots \\ & & \lambda_s^n \\ & & \ldots \\ & & \frac{d^{k_s-1}}{d\lambda^{k_s-1}}(\lambda_s^n) \\ y^{(p-1)}(x) \ \ldots \ y'(x) \ y(x) & & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Jak wiemy, rozwiązanie $y(x)$ jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$, zatem według wzoru Taylora

$$y(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{y^{(n)}(\widetilde{x})}{n!}(x-x_0)^n$$

dla pewnego $\widetilde{x}$ położonego między x a x_0. Ponieważ rozwiązanie $y(x)$ jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$, więc na dowolnym zwartym przedziale $I \subset \mathbb{R}$ funkcje $y(x)$, $y'(x), \ldots, y^{(p-1)}(x)$ są ograniczone. Rozwijając we wzorze (18) wyznacznik względem ostatniego wiersza, wyznaczając stąd $y^{(n)}(x)$ i odpowiednio szacując, stwierdzamy, że dla $x \in I$ i pewnego $K \in \mathbb{R}$ mamy

$$|y^{(n)}(x)| \le K n^{k-1} \beta^n,$$

gdzie $k = \max(k_1, \ldots, k_s)$, $\beta = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_s|)$. Stąd na przedziale I

$$\left|\frac{y^{(n)}(\widetilde{x})(x-x_0)^n}{n!}\right| \le K n^{k-1} \frac{\beta^n (x-x_0)^n}{n!},$$

a więc dla pewnego $r \in \mathbb{R}$ mamy

$$\left|\frac{y^{(n)}(\widetilde{x})(x-x_0)^n}{n!}\right| \le K n^{k-1} \frac{\beta^n r^n}{n!}.$$

Z nierówności tej wynika, że reszta we wzorze Taylora dąży do zera (gdyż $K n^{k-1}\beta^n r^n/n! \to 0$ dla $n \to \infty$), a zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ jest na I jednostajnie zbieżny. Jest więc niemal jednostajnie zbieżny i na $\mathbb{R}$, a stąd na $\mathbb{R}$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ze wzoru (18) dla $x = x_0$ mamy

$$\left|\begin{array}{cc}
 & \lambda_1^n \\
 & \frac{d}{d\lambda}(\lambda_1^n) \\
 & \ldots \\
\Gamma & \frac{d^{k_1-1}}{d\lambda^{k_1-1}}(\lambda_1^n) \\
 & \ldots \\
 & \lambda_s^n \\
 & \ldots \\
 & \frac{d^{k_s-1}}{d\lambda^{k_s-1}}(\lambda_s^n) \\
y_{p-1}\ \cdots\ y_1\ y_0 & y^{(n)}(x_0)
\end{array}\right| = 0. \tag{19}$$

Mnożąc ostatnią kolumnę wyznacznika we wzorze (19) przez $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, otrzymujemy

$$\left|\begin{matrix} & \dfrac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\dfrac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \cdots \\ \Gamma & \dfrac{\dfrac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\dfrac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!}}{n!} \\ & \cdots \\ & \dfrac{\lambda_s^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \cdots \\ & \dfrac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\dfrac{\lambda_s^n(x-x_0)^n}{n!} \\ y_{p-1}\ \cdots\ y_1\ y_0 & \dfrac{y^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \end{matrix}\right| = 0$$

Sumując takie wyznaczniki od $n=0$ do nieskończoności (różnią się one tylko ostatnią kolumną) i biorąc pod uwagę zbieżność wszystkich otrzymanych szeregów, otrzymujemy wzór

$$\left|\begin{matrix} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \cdots \\ \Gamma & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\frac{\lambda_1^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \cdots \\ & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_s^n(x-x_0)^n}{n!} \\ & \cdots \\ & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\frac{\lambda_s^n(x-x_0)^n}{n!} \\ y_{p-1}\ \cdots\ y_1\ y_0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \end{matrix}\right| = 0$$

czyli

$$\left|\begin{matrix} & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \cdots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \cdots \\ & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & \cdots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ y_{p-1}\ \ldots\ y_1\ y_0 & y(x) \end{matrix}\right| = 0,$$

a więc wzór (17).

4.2. Przykład. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Równaniem charakterystycznym jest tu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

o pierwiastku dwukrotnym

$$\lambda = 1.$$

Rozwiązanie znajdujemy ze wzoru (17):

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 1 & e^{\lambda x} \\ 1 & 0 & xe^{\lambda x} \\ 2 & 1 & y(x) \end{bmatrix} = 0;$$

mamy tu $2xe^{\lambda x} - (\lambda xe^{\lambda x} - e^{\lambda x}) - y(x) = 0$ i przy $\lambda = 1$

$$y(x) = xe^x + e^x.$$

4.3. *Równanie niejednorodne*

Twierdzenie. *Niech dane będzie równanie niejednorodne*

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x).$$

Rozwiązanie tego równania z warunkami początkowymi

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(p-1)}(x_0) = 0$$

opisane jest wzorem

$$
(20)\qquad \begin{vmatrix} & \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_1(x-u)}b(u)du \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_1(x-u)}b(u)du \\ & \dots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_1(x-u)}b(u)du \\ & \dots \\ & \int_{x_0}^{x} e^{\lambda_s(x-u)}b(u)du \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_s(x-u)}b(u)du \\ 1\ 0\ \dots 0\ 0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.
$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

Dowód. Rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia początkowego dane jest wzorem

$$
(21)\qquad y = \int_{x_0}^{x} \widetilde{y}(x + x_0 - u)b(u)\,du,
$$

gdzie $\widetilde{y}$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$
y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0
$$

z warunkami początkowymi

$$
y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(p-2)}(x_0) = 0, \qquad y^{(p-1)}(x_0) = 1.
$$

Rozwiązanie $\widetilde{y}$ można więc opisać wzorem

$$
\begin{vmatrix} & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ 1\ 0\ \dots 0\ 0 & \widetilde{y}(x) \end{vmatrix} = 0.
$$

Wobec wzoru (21) rozwiązanie y równania niejednorodnego można znaleźć ze wzoru (20).

4.4. Przykład. Znajdźmy rozwiązanie zagadnienia

$$
y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.
$$

Wobec wzoru (20) i poprzedniego przykładu mamy tu

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}du \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}du \\ 1 & 0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}\,du &= \frac{1}{2-\lambda}(e^{2x}-e^{\lambda x}), \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}\,du &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{2-\lambda}(e^{2x}-e^{\lambda x})\right] \\ &= \frac{1}{(2-\lambda)^2}(e^{2x}-e^{\lambda x}) - \frac{1}{2-\lambda}xe^{\lambda x}, \end{aligned}$$

więc dla $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}\,du &= e^{2x}-e^{x}, \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^x e^{\lambda(x-u)}e^{2u}\,du &= e^{2x}-e^{x}-xe^{x}, \end{aligned}$$

a wtedy rozwiązanie znajdujemy ze wzoru

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & e^{2x}-e^{x} \\ 1 & 0 & e^{2x}-e^{x}-xe^{x} \\ 1 & 0 & y(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Mamy tu

$$y(x) = e^{2x}-e^{x}-xe^{x}.$$

Rozwiązanie zagadnienia

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

jest sumą rozwiązań poprzedniego przykładu i bieżącego, a więc

$$y = xe^{x} + e^{x} + e^{2x} - e^{x} - xe^{x} = e^{2x}.$$

5. Układ równań różniczkowych

5.1. *Zagadnienie jednorodne*

TWIERDZENIE. *Niech dane będzie zagadnienie jednorodne*

$$y' = Ay, \quad y(x_0) = y_0.$$

Jego rozwiązanie można znaleźć ze wzoru

$$
\begin{vmatrix}
 & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & \dots \\
\Gamma & (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & \dots \\
 & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\
 & \dots \\
 & (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\
A^{p-1}y_0 \dots Ay_0\ y_0 & y(x)
\end{vmatrix} = 0. \tag{22}
$$

Korzystamy tu z oznaczeń podanych w punkcie 2.6.

Uwaga. We wzorze tym (i podobnych) w miejsce Γ należy podstawić elementy tej macierzy (ze wzoru (8)). Natomiast A jest daną macierzą i wzór należy rozumieć w tym sensie, że po formalnym obliczeniu wyznacznika znajdziemy rozwiązanie — funkcję wektorową $y(x)$ zależną w szczególności od macierzy A.

Dowód. Korzystając ze wzoru (13) i definicji operatora D danej wzorem $Dy = Ay$ oraz działając operatorami ostatniego wiersza na rozwiązanie $y(x)$, otrzymujemy wzór

$$
\begin{vmatrix}
\Gamma & \Lambda_n \\
D^{p-1}y(x) \dots Dy(x)\ y(x) & D^n y(x)
\end{vmatrix} = 0;
$$

postępując tak jak w przypadku zagadnienia jednorodnego dla równania różniczkowego, otrzymujemy

$$
\begin{vmatrix}
 & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & \frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & \dots \\
\Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\
 & \dots \\
 & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\
 & \dots \\
 & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\
A^{p-1}y_0 \dots Ay_0\ y_0 & y(x)
\end{vmatrix} = 0,
$$

czyli wzór (22).

Znajdźmy jeszcze wzór opisujący dla układu $y' = Ay$ macierz fundamentalną $W(x)$, podstawową dla $x = x_0$, to znaczy taką, że $W(x_0) = E$. Wtedy $y(x) = W(x)y_0$, a zatem wobec ostatniego wzoru

$$\begin{vmatrix} & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}} e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}} e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1} \ \dots \ A \ E & W(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

5.2. Przykład. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Mamy tu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$Ay_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, o pierwiastkach $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Mamy tu symbolicznie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & e^x \\ 3 & 1 & e^{3x} \\ Ay_0 & y_0 & y(x) \end{vmatrix} = 0,$$

czyli $-2y(x) - y_0(e^{3x} - 3e^x) + Ay_0(e^{3x} - e^x)$, a więc

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2}(e^{3x} - 3e^x)y_0 + \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x)Ay_0) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{3x} - 3e^x)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(e^{3x} - e^x)\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x \\ \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$y_1 = \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{x},$$

$$y_2 = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}.$$

5.3. *Równanie niejednorodne.* Niech dane będzie równanie niejednorodne

$$y' = Ay + b(x).$$

Rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym

$$y(x_0) = 0$$

można znaleźć ze wzoru

$$y = \int_{x_0}^{x} W(x + x_0 - u)b(u)\,du, \tag{24}$$

gdzie W jest macierzą fundamentalną, podstawową dla $x = x_0$ układu $y' = Ay$. Macierz ta opisana jest wzorem (23). Po znalezieniu z tego wzoru macierzy W rozwiązanie y równania niejednorodnego można znaleźć ze wzoru (24).

6. Macierze

6.1. *Wielomian.* Niech dana będzie macierz kwadratowa $A = (a_{ij})$ o elementach $a_{ij} \in K$. Niech macierz ta spełnia równanie zerujące

$$A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0. \tag{25}$$

Korzystając ze wzoru (13) w przypadku $D = A$, otrzymujemy wzór

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1^n \\ & & & (\lambda_1^n)' \\ & & & \ldots \\ & \Gamma & & (\lambda_1^n)^{(k_1-1)} \\ & & & \ldots \\ & & & (\lambda_s^n)^{(k_s-1)} \\ A^{p-1} & \ldots\ A & E & A^n \end{vmatrix} = \Theta. \tag{26}$$

Stąd dla każdego wielomianu φ można znaleźć wielomian $\varphi(A)$ ze wzoru

$$\begin{vmatrix} & \varphi(\lambda_1) \\ & \varphi'(\lambda_1) \\ & \dots \\ \Gamma & \varphi^{(k_1-1)}(\lambda_1) \\ & \dots \\ & \varphi(\lambda_s) \\ & \dots \\ & \varphi^{(k_s-1)}(\lambda_s) \\ A^{p-1} \ \dots \ A \ E & \varphi(A) \end{vmatrix} = 0.$$

6.2. *Szeregi.* Zdefiniujmy funkcję $x \mapsto e^{A(x-x_0)}$ z $\mathbb{R}$ w przestrzeń wektorową macierzy przez szereg

$$e^{A(x-x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} A^n.$$

Szereg ten jest zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i dowolnej macierzy A. Funkcję $e^{A(x-x_0)}$ można znaleźć ze wzoru

$$\begin{vmatrix} & e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & (x-x_0)e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ \Gamma & (x-x_0)^{k_1-1}e^{\lambda_1(x-x_0)} \\ & \dots \\ & e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ & \dots \\ & (x-x_0)^{k_s-1}e^{\lambda_s(x-x_0)} \\ A^{p-1} \ \dots \ A \ E & e^{A(x-x_0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie definiując funkcję

$$\sin A(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1},$$

mamy

$$\left|\begin{array}{cc} & \sin\lambda_1(x-x_0) \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}\sin\lambda_1(x-x_0) \\ & \dots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\sin\lambda_1(x-x_0) \\ & \dots \\ & \sin\lambda_s(x-x_0) \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\sin\lambda_s(x-x_0) \\ A^{p-1} \ \dots\ A\ E & \sin A(x-x_0) \end{array}\right| = 0.$$

Analogicznie można zdefiniować funkcję $\cos A(x-x_0)$ i znaleźć odpowiedni wzór.

6.3. *Macierz odwrotna.* Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to wobec wzoru (25) mamy

$$A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \cdots + a_1 E + a_0 A^{-1} = 0,$$

skąd wynika, że macierz A^{-1} można wyrazić przez $E, A, \dots, A^{p-1}$, a wtedy działając tak jak w paragrafie 2, uzyskamy wzór

$$\left|\begin{array}{cc} & \lambda_1^{-1} \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda_1^{-1} \\ & \dots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\lambda_1^{-1} \\ & \dots \\ & \lambda_s^{-1} \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{k_{1s}-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\lambda_s^{-1} \\ A^{p-1} \ \dots\ A\ E & A^{-1} \end{array}\right| = 0.$$

6.4. *Pierwiastki. Pierwiastkiem* n-tego stopnia z macierzy A nazywamy każdą macierz B taką, że $B^n = A$.

Macierz może:

- nie mieć pierwiastków, na przykład macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nie ma pierwiastków drugiego stopnia,
- mieć skończoną liczbę pierwiastków, np. pierwiastkami kwadratowymi z macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ są macierze $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$,

- mieć nieskończenie wiele pierwiastków, np. pierwiastkami kwadratowymi macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są macierze $\begin{bmatrix} a & \frac{-a^2+1}{b} \\ b & -a \end{bmatrix}$ dla dowolnych a i $b \neq 0$ oraz macierz $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$.

W ostatnich dwóch przypadkach część pierwiastków z macierzy (w szczególności te, które można opisać jako wielomian od $E, A, \ldots, A^{p-1}$) znajdujemy ze wzoru

$$\begin{vmatrix} & \varrho_1 \\ & \frac{\partial}{\partial\lambda}\varrho_1 \\ & \cdots \\ \Gamma & \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial\lambda^{k_1-1}}\varrho_1 \\ & \cdots \\ & \varrho_s \\ & \cdots \\ & \frac{\partial^{k_s-1}}{\partial\lambda^{k_s-1}}\varrho_s \\ A^{p-1} \ \ldots \ A \ E & B \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie liczby ϱ_k są takie, że $\varrho_k^n = \lambda_k$, macierz B jest szukaną, tzn. taką, że $B^n = A$.

6.5. Przykład. Znajdźmy pierwiastki drugiego stopnia z macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mamy tu

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda$$

o pierwiastkach $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$. Pierwiastki B z macierzy A znajdziemy ze wzoru

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & \varrho \\ A & E & B \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie ϱ jest takie, że $\varrho^2 = 4$. Mamy tu

$$B = \frac{1}{4}\varrho A = \frac{1}{4}\varrho \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varrho & \frac{1}{4}\varrho \\ \varrho & \frac{1}{2}\varrho \end{bmatrix}.$$

7. Uwagi dydaktyczne. W przypadku małej liczby godzin przeznaczonej na wykład, w którym musimy opisać rozwiązywanie rozpatrywanych tu zagadnień z elementami teorii ograniczonej do zagadnień liniowych o stałych współczynnikach, opisane rozważania można traktować jako dowody jedyności, a dowody istnienia otrzymać bezpośrednio z uzyskanych wzorów. Na ich podstawie można uzyskać pełną teorię dla zagadnień liniowych o stałych współczynnikach, rozpatrywać pewną klasę zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych itd. Jeśli Czytelnicy będą zainteresowani tą tematyką, będziemy ją kontynuować w następnym numerze czasopisma.

Zauważmy, że opisaną w pracy metodą można w prosty sposób opisać rozwiązanie zagadnienia początkowego dla układu równań różnicowych postaci $y_{n+1} = Ay_n + b(n)$, gdzie A jest macierzą kwadratową stopnia n, a $y_n, b(n)$ są wektorami z $\mathbb{R}^n$.

Na zakończenie autor składa serdecznie podziękowania doktor Katarzynie Litewskiej za pomoc w wykonaniu tej pracy.

Literatura

[1] J. Muszyński, A. D. Myszkis, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1984.

[2] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
Pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa
E-mail: jmuszynski@acn.waw.pl