DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA 5, 2004

Maria Moszyńska (Warszawa)

O geometrii zbiorów wypukłych

Geometria opisuje obiekty spotykane w życiu codziennym, przyrodzie, medycynie, technice. Oczywiście, opisuje je, abstrahując od ich własności fizycznych i chemicznych.

Różne działy geometrii zajmują się obiektami różnych typów, a więc posługują się różnymi narzędziami, różnymi zasobami pojęć. Na przykład, geometria fraktali bada zbiory o budowie bardzo skomplikowanej, podczas gdy geometria zbiorów wypukłych zajmuje się obiektami, które, przeciwnie, wyróżniają się budową prostą.

Podzbiór A przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nazywa się *zbiorem wypukłym*, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów tego zbioru odcinek łączący te punkty jest zawarty w A. *Ciało wypukłe* to taki zbiór wypukły, który jest domknięty w $\mathbb{R}^n$, ograniczony i ma niepuste wnętrze.

Oczywiście przecięcie dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym (być może pustym), natomiast przecięcie ciał wypukłych nie musi być ciałem wypukłym, ponieważ może mieć puste wnętrze.

Geometria zbiorów wypukłych jest obszerną i stale rozwijającą się gałęzią geometrii. Zajmiemy się tutaj jedynie wybranymi jej zagadnieniami.

Niech $\mathcal{K}^n$ będzie rodziną wszystkich niepustych, domkniętych, ograniczonych i wypukłych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{K}^n_0$ — rodziną ciał wypukłych.

Dla dowolnej liczby nieujemnej ε definiuje się *ε-otoczkę* zbioru A w $\mathbb{R}^n$ jako zbiór punktów odległych od A co najwyżej o ε:

$$(A)_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{a\in A} \|x-a\| \le \varepsilon\}.$$

W rodzinie $\mathcal{K}^n$ (i ogólniej dla wszystkich domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$) wprowadza się metrykę Hausdorffa:

$$\varrho_H(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset (B)_\varepsilon \ \text{ i } \ B \subset (A)_\varepsilon\}.$$

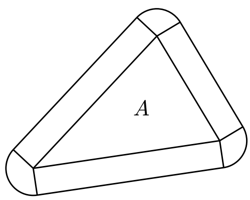
Już około roku 1840 Jacob Steiner udowodnił, że dla dowolnej liczby dodatniej ε i zbioru $A \in \mathcal{K}^n$ objętość (tj. n-wymiarowa miara Lebesgue'a) ε-otoczki $(A)_\varepsilon$ zbioru A wyraża się wzorem

$$V_n((A)_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{n-k} \kappa_{n-k} V_k(A),$$

gdzie V_k jest tzw. k-wymiarową objętością wewnętrzną, a κ_i jest objętością kuli wymiaru i o promieniu 1.

W szczególności, jeżeli A ma wymiar k, to $V_k(A)$ jest k-wymiarową objętością zbioru A, zgodnie z przyjętymi wyżej oznaczeniami.

Aby zilustrować wzór Steinera, rozpatrzmy dwa przykłady, w których zbiór A jest wielościanem wypukłym w $\mathbb{R}^2$ lub w $\mathbb{R}^3$.



Rys. 1

Przykład 1. Niech A będzie trójkątem w $\mathbb{R}^2$. Rys. 1 przedstawia pewną jego ε-otoczkę i rozkład tej otoczki na siedem zbiorów o parami rozłącznych wnętrzach. Są to: trójkąt A, trzy prostokąty, których podstawami są boki tego trójkąta a wysokość równa jest ε, oraz trzy wycinki koła, które złożone razem utworzyłyby całe koło o promieniu ε. Sumując pola (tj. 2-wymiarowe objętości) tych siedmiu kawałków, otrzymamy $V_2((A)_\varepsilon)$. Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku objętości wewnętrzne wielokąta wypukłego A, występujące we wzorze Steinera, są: $V_2(A)$, $V_1(A) =$ połowa obwodu trójkąta A, oraz $V_0(A) = 1$.

Przykład 2. Niech A będzie sześcianem w $\mathbb{R}^3$. Jego ε-otoczkę można przedstawić w postaci sumy mnogościowej dwudziestu siedmiu zbiorów o parami rozłącznych wnętrzach. Są to: sześcian A, sześć prostopadłościanów, których podstawami są ściany sześcianu A a wysokość równa jest ε, dwanaście walców, których podstawami są ćwiartki kół o promieniu ε, a wysokości są równe długości krawędzi danego sześcianu (walce te można złożyć do trzech walców obrotowych o promieniu podstawy równym ε i wysokości równej długości krawędzi), oraz osiem wycinków kuli, które można złożyć do kuli o promieniu ε.

Nietrudno sprawdzić, że podobnie jak w przykładzie 1 można przedstawić objętość ε-otoczki wielościanu A jako sumę, która ma postać taką jak we wzorze Steinera, przy czym występujące tam objętości wewnętrzne zbioru

A są: $V_3(A)$, $V_2(A)$ = połowa pola powierzchni sześcianu A, $V_1(A)$ = suma długości krawędzi pomnożonych przez tzw. unormowane kąty zewnętrzne między odpowiednimi ścianami, oraz $V_0(A) = 1$.

Funkcjonały $V_0, \ldots, V_n : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}_+$ mają następujące własności:

- są rosnące:
$$A_1 \subset A_2 \;\Rightarrow\; V_k(A_1) \le V_k(A_2)$$
dla $k = 0, \ldots, n$;
- są niezmiennicze ze względu na izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^n$: jeżeli istnieje izometria przekształcająca A na B, to $V_k(A) = V_k(B)$ dla $k = 0, \ldots, n$;
- są tzw. waluacjami: jeżeli $A_1, A_2, A_1 \cup A_2 \in \mathcal{K}^n$, to
$$V_k(A_1 \cup A_2) = V_k(A_1) + V_k(A_2) - V_k(A_1 \cap A_2)$$
dla $k = 0, \ldots, n$;
- są ciągłe ze względu na metrykę Hausdorffa w $\mathcal{K}^n$.

Zbiór wszystkich waluacji rosnących niezmienniczych ze względu na izometrie i nieujemnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez liczby nieujemne. Zbiór ten został scharakteryzowany przez Hugo Hadwigera około roku 1955:

TWIERDZENIE HADWIGERA. *Funkcjonał $\Phi : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}_+$ jest waluacją rosnącą i niezmienniczą ze względu na izometrie wtedy i tylko wtedy*, *gdy istnieją $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \ge 0$, dla których*
$$\Phi = \alpha_0 V_0 + \cdots + \alpha_n V_n.$$

Twierdzenie to jest jednym z dwu słynnych twierdzeń Hadwigera o funkcjonałach. Drugie dotyczy zbioru waluacji niezmienniczych ze względu na izometrie i ciągłych ze względu na metrykę Hausdorffa w $\mathcal{K}^n$. Zbiór ten jest przestrzenią liniową (ze względu na działania dodawania i mnożenia przez dowolny skalar), a warunek charakteryzujący elementy tego zbioru jest analogiczny jak w twierdzeniu 1, nie ma w nim jedynie ograniczenia $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \ge 0$. A więc w myśl tego drugiego twierdzenia Hadwigera objętości wewnętrzne generują tę przestrzeń liniową. Nietrudno pokazać, że są one liniowo niezależne, a więc stanowią jej bazę. Dlatego nazywane są również funkcjonałami bazowymi.

Funkcjonały bazowe stanowią jedno z ważnych narzędzi geometrii zbiorów wypukłych. Nie jest to jednak narzędzie, które pozwalałoby jednoznacznie wyznaczyć dane ciało, tj., inaczej mówiąc, odpowiedzieć na pytanie, czy dane dwa ciała są izometryczne (tzn. są identyczne lub różnią się tylko położeniem).

Jest to jeden z problemów, którymi zajmuje się tomografia geometryczna. Bada ona własności ciał wypukłych na podstawie znajomości ich rzutów i przekrojów. Następujące dwa twierdzenia można uważać za początek tej teorii, chociaż sam termin *tomografia geometryczna* został wprowadzony (przez Richarda Gardnera) znacznie później, w roku 1990.

Pierwsze z nich, twierdzenie Croftona, wyraża objętości wewnętrzne danego ciała wypukłego poprzez objętości wewnętrzne jego przekrojów hiperpłaszczyznami:

TWIERDZENIE CROFTONA. *Dla każdego* $A \in \mathcal{K}^n$ *i* $k = 1, \ldots, n$,

$$V_k(A) = \alpha_{k,n} \int V_{k-1}(A \cap H)\, d\mu,$$

przy czym czynnik $\alpha_{k,n}$ *nie zależy od* A, *a* μ *jest pewną* (*określoną w naturalny sposób*) *miarą na zbiorze hiperpłaszczyzn* (*tj. podprzestrzeni afinicznych wymiaru* $n-1$) *w* $\mathbb{R}^n$.

Drugie, twierdzenie Cauchy'ego, wyraża objętości wewnętrzne danego ciała poprzez objętości wewnętrzne jego rzutów na hiperpłaszczyzny:

TWIERDZENIE CAUCHY'EGO. *Dla każdego* $A \in \mathcal{K}^n$ *i* $k = 0, \ldots, n$,

$$V_k(A) = \beta_{k,n} \int V_k(\pi_H(A))\, d\nu,$$

przy czym czynnik $\beta_{k,n}$ *nie zależy od* A, *a* ν *jest pewną miarą na zbiorze hiperpłaszczyzn przechodzących przez początek układu współrzędnych.*

(Współczynniki $\alpha_{k,n}$ i $\beta_{k,n}$ występujące w tych wzorach wyznacza się, korzystając z twierdzeń Hadwigera.)

Czytelników zainteresowanych tomografią geometryczną i jej związkami z medycyną zachęcam gorąco do przeczytania pięknego artykułu Gardnera [2], który poprzedził jego monografię [1], również godną polecenia. Przytoczę tu parę zdań z tych publikacji.

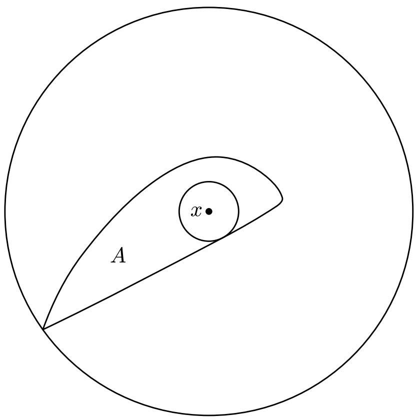
W [1] Gardner pisze: *Geometric tomography is the area of mathematics dealing with the retrieval of information about a geometric object from data about its sections, or projections, or both* (1). Cytując tę definicję w [2], pisze tam dalej tak: *By considering only a strict subclass of density distributions, one can sometimes obtain uniqueness in the inverse problem of determining a set from partial knowledge of its sections. For example, the author and McMullen (...) proved that there are certain prescribed sets of four directions in n-dimensional Euclidean space (...), such that the X rays of a convex body in these directions distinguish it from all other convex bodies* (2).

(1) „Tomografia geometryczna jest dziedziną matematyki, która zajmuje się uzyskiwaniem (odtwarzaniem) informacji o obiekcie geometrycznym na podstawie danych o jego przekrojach lub rzutach lub jednych i drugich."

(2) „Rozpatrując tylko pewną podklasę rozkładów gęstości, można czasami wyznaczyć jednoznacznie zbiór na podstawie znajomości jego przekrojów. Na przykład, autor wspólnie z McMullenem (...) udowodnili, że istnieją pewne czteroelementowe zbiory kierunków w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, takie że promienie X w kierunkach należących do dowolnej z tych czwórek wyróżniają dane ciało spośród wszystkich ciał wypukłych."

Wróćmy teraz na chwilę do funkcjonałów bazowych. Są to funkcje, które ciałom wypukłym przyporządkowują pewne liczby rzeczywiste. Inną interesującą klasą funkcji określonych na $\mathcal{K}^n$ są *selektory*, tj. funkcje o wartościach w $\mathbb{R}^n$, które z każdego ciała wypukłego (lub, ogólniej, niepustego zbioru zwartego wypukłego) wybierają pewien punkt. Dobrze znanym przykładem selektora jest *środek ciężkości* — funkcja wybierająca z każdego zbioru $A \in \mathcal{K}^n$ środek ciężkości tego zbioru, $c(A)$. Sens fizyczny tego pojęcia jest dobrze znany: jeżeli „podeprzemy" zbiór A w punkcie $c(A)$, zbiór ten znajdzie się w stanie równowagi.

Innym, mniej znanym przykładem selektora jest *środek pierścienia minimalnego*, pojęcie zdefiniowane już w roku 1924 dla figur wypukłych na płaszczyźnie euklidesowej, a zbadane dla ciał wypukłych w $\mathbb{R}^n$ przez Imre Bárány'ego dopiero w 1988 roku.



Rys. 2

Dla dowolnego ciała $A \in \mathcal{K}_0^n$ i dowolnego punktu $x \in A$ rozpatruje się dwie kule o środku x: „dużą", tj. najmniejszą zawierającą A, i „małą", tj. największą zawartą w A. Usuwając z dużej kuli wnętrze małej, otrzymujemy *pierścień o środku* x, o najmniejszej grubości, zawierający brzeg ciała A (rys. 2). Oczywiście grubość tego pierścienia zależy od x. W myśl twierdzenia Bárány'ego istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in A$, dla którego ta grubość jest najmniejsza. Odpowiedni pierścień o środku x_0 to tzw. *pierścień minimalny ciała* A; jest to „najcieńszy" pierścień zawierający brzeg tego ciała (w przypadku $n > 2$ bardziej właściwa byłaby nazwa „minimalna skorupa ciała A"). Punkt x_0 nazywa się *środkiem pierścienia minimalnego*.

Pokażemy jeszcze jeden przykład selektora, tzw. *środek radialny*. Dla dowolnego ciała A, jego środek radialny, $r(A)$, jest to punkt, którego średnia odległość od punktów brzegu ciała A jest największa. Dokładniej, niech $\varrho_A : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ będzie *funkcją radialną ciała* A określoną na sferze jednostkowej (sferę tę można traktować jako zbiór wektorów o długości 1): jeżeli $0 \in A$, jest ona określona przez wzór

$$\varrho_A(u) := \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda u \in A\}.$$

Niech σ będzie sferyczną miarą Lebesgue'a. Wiadomo, że funkcja $\varPhi_A : A \to \mathbb{R}$ określona przez wzór

$$\varPhi_A(x) := \int\limits_{S^{n-1}} \varrho_{A-x}(u)\, d\sigma(u)$$

ma dokładnie jedno maksimum globalne. Punkt, w którym osiągane jest to maksimum, to właśnie $r(A)$.

Niektóre podstawowe pytania dotyczące własności środka radialnego są dotychczas otwarte. Są one tym bardziej intrygujące, że pojęcie to wydaje się bliskie naszej intuicji: jeżeli brzeg obszaru A jest z jakiegoś punktu widzenia „niedobry", np. jest tam za zimno, za gorąco, za ciemno, za dużo groźnych bakterii, „najlepszym" dla nas punktem tego obszaru jest jego środek radialny.

Geometria zbiorów wypukłych ma wiele różnych zastosowań. Zainteresowanych Czytelników zachęcam do lektury artykułów [3], [4] Petera Grubera.

Literatura

[1] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge Univ. Press, 1995.
[2] R. J. Gardner, *Geometric tomography*, Notices Amer. Math. Soc. 42 (1995), 422–429.
[3] P. M. Gruber, *Seven Small Pearls from Convexity*, Math. Intelligencer 5 (1983), 16–19.
[4] P. M. Gruber, *Aspects of convexity and its applications*, Expo. Math. 2 (1984), 47–83.
[5] M. Moszyńska, *Geometria zbiorów wypukłych. Zagadnienia wybrane*, WNT, 2001.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: mariamos@mimuw.edu.pl