MATEMATYKA STOSOWANA 5, 2004

Bolesław Kopociński (Wrocław)

Jestem za, a nawet przeciw

(Próba matematycznego modelowania sposobu myślenia Lecha Wałęsy)

1. Wprowadzenie. Przytoczone wyżej powiedzenie prezydenta Lecha Wałęsy nie doczekało się dotąd, jak sądzę, analizy matematycznej, zachowując jedynie swój anegdotyczny charakter. W tym artylule podejmuję próbę pokazania, że ma ono głębszy sens, a nawet jest optymalne w pewnych okolicznościach. Dodatkowo odpowiem na pytanie, czy Wałęsa, myśląc konsekwentnie, w pewnych okolicznościach wypowie się jednoznacznie. Dla przejrzystości wywodów nie zajmuję się konkretną sytuacją społeczną, lecz zakładam skrajnie uproszczony model matematyczny.

Zauważmy na wstępie, że politycy coraz częściej traktują działalność publiczną w kategoriach gry. Przyjmijmy ten współczesny sposób myślenia i przejdźmy do zdefiniowania niezbędnych pojęć. Zagadnienie rozpatrzymy w kategoriach teorii podejmowania decyzji w warunkach niepewności. Załóżmy w najprostszym modelu, że politycy wybierają jedną z dwóch możliwości 0 lub 1, które mogą się wydarzyć z prawdopodobieństwami odpowiednio p i $1-p$. Biorący udział w grze przewidują, co się wydarzy, wnosząc przedtem stawkę w wysokości 1. Po zrealizowaniu się zdarzenia, kiedy stanie się jasne, kto wytypował trafnie, suma stawek będzie podzielona wśród graczy, którzy typowali właściwie. Dopuszczamy możliwość obstawiania obu możliwości przez tego samego gracza poprzez założenie odpowiedniego podziału stawki. Dodajmy wreszcie, że gracze podejmują decyzje po kolei, pierwszy przy niczym nieskrępowanej swobodzie wyboru, a każdy następny przy znajomości wyboru poprzedników. To różni te rozważania od elementarnej teorii gier, w której zakłada się zazwyczaj, że gracze podejmują decyzje równocześnie i niezależnie jeden od drugiego. Jest to natomiast przykład gry dynamicznej z nieskończenie wieloma strategiami czystymi, w których gracze znają akcje poprzedników (objaśnienie pojęć z teorii gier znajdzie Czytelnik w [1]).

2. Podejście intuicyjne. Przyjmijmy na razie, że przewidywane zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Grających jest trzech: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{W}$. Wydaje się, że $\mathcal{A}$ nie popełni błędu, jeśli wybierze 0. Także naturalne jest przypuszczenie, że $\mathcal{B}$ wybierze 1, kierując się przesłanką, że w przypadku wygranej nie będzie dzielił się wygraną z $\mathcal{A}$. Zauważmy teraz, że $\mathcal{W}$ jako trzeci znajduje się w kłopotliwej sytuacji. Jeśli wybierze 0 i ta możliwość nastąpi, to podzieli się wygraną z $\mathcal{A}$ i wygra $3/2$, natomiast jeśli wypadnie 1, to uzyska 0. Oczekiwana wygrana wyniesie więc $3/4$, a pomniejszona o stawkę w grze da zysk ujemny. Gracz $\mathcal{A}$ uzyska to samo, natomiast $\mathcal{B}$ uzyska wynik dodatni. Odnotujmy jeszcze, że $\mathcal{W}$ nie poprawi zysku, jeśli wybierze 1 lub posłuży się strategią losową; zysk bowiem jest niedodatni przy każdym zdarzeniu elementarnym podczas losowania decyzji. $\mathcal{W}$ poprawia oczekiwaną wygraną, wybierając deterministyczy podział stawki, zyska on najwięcej, orzekając, że wypadnie 0, i stawiając pół stawki, oraz orzekając, że wypadnie 1, i stawiając pół stawki. Zrealizuje on w ten sposób strategię *jestem za, a nawet przeciw*. Teraz $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{W}$ mają oczekiwaną wygraną 1.

3. Dowolne p. Niech $0 \le p \le 1$ i niech $p' = 1 - p$. Zbadajmy najpierw wzajemne zachowania $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ w grze dwuosobowej. Niech $\mathcal{A}$ dzieli stawkę w proporcji a i $a' = 1 - a$; podział stawki $\mathcal{B}$ niech będzie w proporcji b i $b' = 1 - b$; niech $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$. Załóżmy, że zwycięzcy sumę stawek dzielą proporcjonalnie do zadeklarowanych wielkości. Niech $0 < a + b < 2$; oczekiwane zyski $W_{\mathcal{A}}$ i $W_{\mathcal{B}}$ graczy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są równe odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
W_{\mathcal{A}} &= W_{\mathcal{A}}(a,b;p) = \frac{2pa}{a+b} + \frac{2p'a'}{a'+b'}, \\
W_{\mathcal{B}} &= W_{\mathcal{B}}(a,b;p) = \frac{2pb}{a+b} + \frac{2p'b'}{a'+b'}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Rozsądnie jest przyjąć, że $\mathcal{B}$ przy ustalonych p, a maksymalizuje $W_{\mathcal{B}}$ w przedziale $0 \le b \le 1$. W standardowy sposób stwierdzamy, że $W_{\mathcal{B}}$ osiąga maksimum przy

$$
b^* = b^*(a;p) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } p < p_0 = \frac{aa'}{4-3a}, \\ \frac{2\sqrt{pa}}{\sqrt{pa}+\sqrt{p'a'}} - a, & \text{jeśli } p_0 \le p = p_1 \le \frac{(a+1)^2}{1+3a}, \\ 1, & \text{jeśli } p > p_1. \end{cases} \tag{2}
$$

Zachowań graczy przy skrajnych p tutaj nie badamy. Można sprawdzić, że w całym przedziale $0 \le a \le 1$ zachodzą nierówności $p_0 \le 1/9$, $p_1 \ge 8/9$. Jeśli $p_0 \le p \le p_1$, to $\mathcal{A}$ uzyska $W^*_{\mathcal{A}} = W_{\mathcal{A}}(a, b^*; p) = (\sqrt{pa} + \sqrt{p'a'})^2$.

Rozsądnie jest przyjąć, że $\mathcal{A}$ przy ustalonym p maksymalizuje $W^*_{\mathcal{A}}$ w przedziale $0 \le a \le 1$. Wyrażenie $\sqrt{pa} + \sqrt{p'a'}$ osiąga maksimum przy $a^* = p$. Z (2) wynika $b^*(a^*;p) = p$. Zatem $W_{\mathcal{A}}(a^*, b^*; p) = W_{\mathcal{B}}(a^*, b^*; p) = 1$, jeśli tylko $1/9 \le p \le 8/9$.

Wprowadźmy teraz $\mathcal{W}$ do gry. Ponieważ $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, dzieląc stawki, gwarantują sobie wzajemnie jednakowe wygrane, więc wydaje się, że $\mathcal{W}$ jako trzeci w grze także powinien dzielić stawkę. Pokażemy, że cokolwiek $\mathcal{W}$ przedsięweźmie, nie osiągnie zysku; dzieląc stawkę podobnie jak $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ w proporcji p i p', gwarantuje sobie jednak zwrot stawki.

Sprawdźmy tę tezę. Niech $\mathcal{W}$ dzieli stawkę w proporcji w i $w' = 1 - w$. Przy poprzednich oznaczeniach decyzji $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, analogicznie do (1), gdy $0 < a + b + w < 3$, określamy wygrane wszystkich osób jak następuje:

$$W_{\mathcal{A}} = W_{\mathcal{A}}(a,b,w;p) = \frac{3pa}{a+b+w} + \frac{3p'a'}{a'+b'+w'},$$
$$W_{\mathcal{B}} = W_{\mathcal{B}}(a,b,w;p) = \frac{3pb}{a+b+w} + \frac{3p'b'}{a'+b'+w'},$$
$$W_{\mathcal{W}} = W_{\mathcal{W}}(a,b,w;p) = \frac{3pw}{a+b+w} + \frac{3p'w'}{a'+b'+w'}.$$

Przy ustalonych a, b, p wygrana $W_{\mathcal{W}}$ osiąga maksimum przy

$$w^* = w^*(a,b;p) = \frac{3\sqrt{p(a+b)}}{\sqrt{p(a+b)} + \sqrt{p'(a'+b')}} - a - b. \tag{3}$$

Jeśli $0 \le w^* \le 1$, to

$$W_{\mathcal{A}}(a,b,w^*(a,b;p);p) = \left(\sqrt{p(a+b)} + \sqrt{p'(a'+b')}\right)\left(\frac{pa}{\sqrt{p(a+b)}} + \frac{p'a'}{\sqrt{p'(a'+b')}}\right),$$
$$W_{\mathcal{B}}(a,b,w^*(a,b;p);p) = \left(\sqrt{p(a+b)} + \sqrt{p'(a'+b')}\right)\left(\frac{pb}{\sqrt{p(a+b)}} + \frac{p'b'}{\sqrt{p'(a'+b')}}\right),$$
$$W_{\mathcal{W}}^* = W_{\mathcal{W}}(a,b,w^*(a,b;p);p) = 3 - \left(\sqrt{p(a+b)} + \sqrt{p'(a'+b')}\right)^2.$$

Weźmy pod uwagę $b^*(a;p)$ takie, że

$$\max_{0\le b\le 1} W_{\mathcal{B}}(a,b,w^*(a,b;p);p) = W_{\mathcal{B}}(a,b^*(a;p),w^*(a,b^*(a;p);p);p).$$

Badanie wyrażenia $b^*(a;p)$ jest dość żmudne analitycznie, najprościej więc zbadać je numerycznie i sprawdzić, że

$$\max_{0\le a\le 1} W_{\mathcal{A}}(a,b^*(a;p),w^*(a,b^*(a;p));p);p) = W_{\mathcal{A}}(p,b^*(p;p),w^*(p,b^*(p;p);p);p) = W_{\mathcal{A}}(p,p,p;p) = 1.$$

Wygrane pozostałych osób są także 1.

4. Wnioski. Praktyczne wskazania wynikające z naszej dotychczasowej analizy, jakkolwiek matematycznie oczywiste, są trudne do zaakceptowania przez obserwatorów sceny politycznej. Powszechnie uważa się, że politycy powinni wyraziście różnić się między sobą. Na szczęście, być może nieznajomość podstaw teorii podejmowania decyzji w warunkach niepewności lub jakaś nieznana funkcja użyteczności modyfikująca odczucie zysku sprawiają, że nie wszyscy politycy zachowują się zgodnie z teorią gier. Przypuśćmy zatem, że $\mathcal{A}$ jest tylko „statystycznie wiarogodny”, tzn. zawsze stawia na to zdarzenie, które ma większe prawdopodobieństwo, natomiast $\mathcal{B}$ jest „zdeklarowanym oponentem” i zawsze postawi przeciwnie aniżeli $\mathcal{A}$. Wówczas $\mathcal{W}$ może zyskać, ale strategia *jestem za, a nawet przeciw* może być nieodzowna.

Niech $0.5 \leq p \leq 0.8$. Wyrażenie $W_{\mathcal{W}}(1,0,w;\ p)$ ma maksimum $W_{\mathcal{W}}(1,0,w^*;\ p) = 2(1-\sqrt{pp'})$ przy

$$w^* = w^*(1,0;p) = \frac{3\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{p'}} - 1.$$

Dla p bliskiego 0.5 zysk $\mathcal{W}$ jest nikły, ale np. $W_{\mathcal{W}}(1,0,w^*;0.8) = 1.2$. Dla $p \geq 0.8$ maksimum leży na brzegu przedziału, tj. $w^* = 1$ i wówczas $W_{\mathcal{W}}(1,0,1;p) = 1.5p$. Daje to odpowiedź twierdzącą na pytanie postawione na wstępie: są okoliczności, w których Lech Wałęsa wypowie się jednoznacznie.

5. Nieznane p. Dotychczas rozważaliśmy nasz problem decyzyjny przy założeniu, że p jest znane, tak jakby dotyczył np. przewidywania płci potomka jakiejś osoby publicznej, lub sytuacji podobnej. W rzeczywistości na ogół p nie jest znane i eksperci szacują je na użytek polityków z pewną dokładnością. Odchodzimy od szukania optymalnych strategii dla wszystkich graczy, właściwego dla teorii gier, dotykając natomiast pojawiających się teraz problemów statystycznych. Nie będziemy zanudzali Czytelnika ogólnymi rachunkami; przyjmiemy $p = 0.5$, przy czym zakładamy, że gracze tego nie wiedzą.

Przyjmijmy, że $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ szacują p i nie bacząc na ewentualne wybory współgraczy, przyjmują $a = \varepsilon$, $b = \eta$, przy czym ε i η są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej p i pewnej wariancji $\sigma^2 > 0$. Przy ustalonych a, b, $p = 0.5$ wygrana $\mathcal{W}$ osiąga maksimum $W^*_{\mathcal{W}} = 2 - \sqrt{(a+b)(a'+b')}$ z $w^*(a,b;p)$ określonym w (3). Przyjmijmy dwupunktowy rozkład błędu p: $P(\varepsilon = p - \sigma) = P(\varepsilon = p + \sigma) = 0.5$. Dla określenia oczekiwanej wygranej niech $a_1 = p - \sigma$, $b_1 = p - \sigma$, $a_2 = p - \sigma$, $b_2 = p + \sigma$, $a_3 = p + \sigma$, $b_3 = p - \sigma$, $a_4 = p + \sigma$, $b_4 = p + \sigma$. Przy niezależności wzajemnej ε, η mamy

$$W^{**}_{\mathcal{W}}(\sigma) = \mathrm{E}(W^*_{\mathcal{W}}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} W_{\mathcal{W}}(a_i, b_i, w^*(a_i, b_i; p); p).$$

Obliczamy dla przykładu: $W^{**}_{\mathcal{W}}(0.1) = 1.01$, $W^{**}_{\mathcal{W}}(0.2) = 1.04$, $W^{**}_{\mathcal{W}}(0.282) = 1.05$. Widzimy, że oczekiwana wygrana $W^{**}_{\mathcal{W}}(\sigma)$ rośnie wraz z σ, zatem nieprofesjonalność ekspertów sprzyja $\mathcal{W}$.

Praca cytowana

[1] A. Wiszniewska-Matyszkiel, *Eksploatacja ekosystemów a teoria gier I: gry deterministyczne niekooperacyjne*, Mat. Stos. 2(43) (2001), 11–31.

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
Pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
E-mail: ibk@math.uni.wroc.pl