

KRZYSZTOF OPALSKI, KATARZYNA KACPRZAK,
KAMIL MACIEJCZYK, MICHAŁ PAWŁOWSKI (Warszawa)

Modelowanie polskiego rynku energii elektrycznej

Streszczenie. W artykule opisano modelowanie rynku energii elektrycznej handlowanej na Towarowej Giełdzie Energii S.A. w Warszawie. W pracy opisano wybrany model dynamiki cen energii elektrycznej, a następnie opisano proces kalibracji powstałego modelu do danych rynkowych tak, aby był spełniony warunek braku arbitrażu. Tak skalibrowany model został wykorzystany do symulacji chwilowej ceny energii. Pozwoliło to na przeprowadzenie wyceny kontraktu terminowego typu forward na dostawę energii, a także waniliowej opcji zakupu energii elektrycznej. Odpowiednie wyceny zostały zaimplementowane w statystycznym pakiecie R.

Słowa kluczowe: matematyka finansowa, rynek energii, wycena kontraktów forward, wycena opcji.

1. Wstęp. Niniejszy artykuł traktuje o modelowaniu rynku energii elektrycznej handlowanej na Towarowej Giełdzie Energii S.A. w Warszawie. Zaprezentowany model został stworzony na potrzeby konkursu „Praktyka inżynierii finansowej”, którego finał odbył się w maju b.r. w firmie Ernst&Young. Jego prezentacja zapewniła autorom zajęcie drugiego miejsca. Zadanie konkursowe polegało na odpowiednim wyborze i uzasadnieniu matematycznego opisu dynamiki cen energii elektrycznej, następnie skalibrowaniu powstałego modelu do danych rynkowych, tak aby warunek braku arbitrażu był spełniony, i wreszcie symulację w jego obrębie chwilowej ceny energii. Wszystko to miało posłużyć wycenie kontraktu terminowego typu forward opiewającego na dostawę energii o mocy 5 MW w terminie 1.06.2011r. - 30.06.2011r. za cenę 190 PLN/MWh, a także waniliowej opcji zakupu energii elektrycznej o tej samej mocy i na ten sam okres z ceną wykonania 200 PLN/MWh i terminem realizacji 27.05.2011r. Co więcej, aby zapewnić powstałemu modelowi funkcjonalność, zaimplementowano w statystycznym pakiecie R narzędzie wykonujące wspomniane czynności.

Niniejsza praca ukazuje techniczne aspekty podejścia przyjętego przez autorów wraz z ich uzasadnieniami.

2. Charakterystyka rynków energii. Wybór modelu rynku, czyli opis dynamiki cen instrumentu bazowego (cen energii elektrycznej), a co za tym idzie, metody kalibracji oraz wykorzystywane techniki numeryczne, zostały zdeterminowane przez wyjątkową specyfikę rynków energii elektrycznej na świecie, szczególnie obserwowaną na stosunkowo młodej Towarowej Gieldzie Energii S.A. w Warszawie. Cechami charakterystycznymi, odróżniającymi owe rynki od dobrze znanych nam rynków finansowych, są przede wszystkim:

- Sezonowość (roczna, tygodniowa, dzienna) – cyklicznie powtarzające się trendy w wielkościach cen obserwowane na przestrzeni lat, tygodni, a także w trakcie trwania doby (brak niezależności przyrostów). Tę ostatnią, zgodnie z założeniami, pominięto w modelu.
- Powrót cen do średniej – po uwzględnieniu trendów oraz sezonowości, ceny mają tendencję do powracania do stałego poziomu.
- Nieoczekiwane, gwałtowne skoki cen spot – spowodowane np. usterką w elektrowni czy sieci transmisyjnej, bądź też nagłą zmianą temperatury otoczenia (przyrosty, w przeciwieństwie do klasycznego modelu Blacka-Scholesa, nie są lognormalne).
- Brak możliwości magazynowania energii, a w związku z tym niemożność wyznaczenia strategii replikującej.

3. Założenia teoretyczne modelu. Niech S_t oznacza cenę spot energii elektrycznej na modelowanym rynku, czyli na Towarowej Gieldzie Energii. Przyjęto, że ceny S_t opisuje równanie

$$(1) \quad \ln(S_t) = g(t) + Y_t,$$

co można też zapisać

$$S_t = G(t)e^{Y_t},$$

gdzie $G(t) = e^{g(t)}$, podczas gdy $g(t)$ jest deterministyczną funkcją sezonowości, Y_t jest procesem stochastycznym zadany równaniem

$$(2) \quad dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma(t) dZ_t + \ln J dQ_t.$$

Jest to proces powracający do średniej wynoszącej 0 o szybkości powrotu równej α . Parametr σ jest zależną od czasu zmiennością, J wielkością skoku, gdzie $\ln J$ ma rozkład normalny $\ln J \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$, Z jest procesem Wienera, Q jest procesem Poissona takim, że

$$dQ_t = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } l dt, \\ 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - l dt, \end{cases}$$

przy czym l jest intensywnością częstotliwości. Co więcej, J , Q i Z są niezależne.

Wybrany model uwzględnia wyżej wymienione aspekty, w szczególności wyodrębniono w nim komponentę sezonowości, a powrót cen do średniej zapewnia użycie procesu Orsteina-Uhlenbecka. Dodano też składnik odpowiadający skokom cen.

Korzystając z lematu Itô, można napisać

$$(3) \quad dS_t = \alpha(\rho(t) - \ln S_t)dt + \sigma(t)S_t dZ_t + S_t(J - 1)dQ_t,$$

gdzie $\rho(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) + g(t)$.

Ponieważ strategie zabezpieczające, które są zazwyczaj związane z przechowywaniem sporych ilości instrumentu bazowego są w przypadku rynku energii elektrycznej niemożliwe, dużą popularnością cieszą się tu kontrakty terminowe typu forward. Stąd też, niezwykle użyteczna okazuje się możliwość wydobycia krzywej forwardowej z bazującego na cenie spot modelu. W obrębie tego modelu możliwe jest uzyskanie odpowiedniego wzoru w sposób analityczny.

Jak wiadomo, zakup kontraktu forward w chwili t zapewnia wypłatę w chwili T wielkości $S_T - K$, przy czym K jest z góry ustaloną ceną wykonania kontraktu. Ceną forward nazywamy taką wartość K , iż cena kontraktu w chwili jego zakupu t wynosi 0. Wynika stąd, że cena forward w chwili t kontraktu forward zapadającego w chwili T wynosi

$$(4) \quad F(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}[S_T | \mathcal{F}_t],$$

gdzie \mathcal{Q} jest odpowiednio dobraną miarą martyngałową. Szczegóły wyceny wspomnianego kontraktu forward na dostawę energii opisano w rozdziale „Kalibracja modelu i wyniki”, warto tu jedynie nadmienić, że w przypadku tego typu kontraktu, gdy jego realizacja odbywa się w okresie jednego miesiąca, za S_T przyjmuje się średnią z cen energii za ten okres.

W celu analitycznego policzenia wzoru na tę cenę, wystarczy scałkować stochastyczne równanie różniczkowe (3), dzięki czemu można wyznaczyć szukaną warunkową wartość oczekiwaną. Więcej informacji na temat wyprowadzenia tych wzorów można znaleźć w pracy [CaFi2005]. Otrzymany wzór ma postać

$$(5) \quad F(t, T) = G(T) \cdot$$

$$\left(\frac{S(t)}{G(t)} \right)^{e^{-\alpha(T-t)}} e^{\int_t^T [\frac{1}{2}\sigma^2(s)e^{-2\alpha(T-s)} - \lambda\sigma(s)e^{-\alpha(T-s)}] ds + \int_t^T \xi(\sigma_J, \alpha, T, s) ds - l(T-t)},$$

$$(6) \quad \xi(\sigma_J, \alpha, T, s) \equiv e^{-\frac{\sigma_J^2}{2}e^{-\alpha(T-s)} + \frac{\sigma_J^2}{2}e^{-2\alpha(T-s)}}.$$

Kontrakt opcyjny, którego zagadnienie wyceny praca też podejmuje, posiada funkcję wypłaty w chwili T równą $\max(S_T - K, 0)$. Nadaje on zatem jego nabywcy prawo do kupna instrumentu podstawowego, tutaj dostawy energii elektrycznej w czerwcu b.r., za cenę K . Interpretacja wielkości S_T

jest nieco inna i bardziej skomplikowana niż w przypadku kontraktu forward na dostawę energii w takim samym okresie czasu. Szczegóły przedstawiono w dalszej części pracy.

4. Kalibracja modelu i wyniki

4.1. Schemat procedury kalibracyjnej. Analizę zaczęto od wybrania danych, które posłużyły jako dane niezbędne do poznania specyfiki polskiego rynku energii, a także przeprowadzenia procesu kalibracji. Szczegółowy opis użytych danych znajduje się w części "Szczegóły wyceny i wyniki".

Rzeczą niezbędną przed rozpoczęciem kalibracji jest odsezonowanie danych. Dzięki temu możliwe jest zweryfikowanie hipotezy o rozkładzie normalnym odsezonowanych przyrostów, a także wydobycie wartości parametrów modelu. W ten sposób został znaleziony proces Y_t ze wzoru (1) powracający do średniej równej 0. Jeśli teraz S_t będzie oznaczać wektor cen energii elektrycznej na wybranym zakresie czasu, zgodnie z poprzednimi oznaczeniami, to wzór na wektor logarytmów odsezonowanych indeksów przyjmuje postać $Y_t = \ln(S_t) - g(t)$ zgodnie ze wzorem (1), przy czym $g(t) = j(t) + r(t) - m$, gdzie $j(t)$ jest wektorem średnich cen dla konkretnych dni tygodnia, $r(t)$ jest wektorem wartości funkcji sezonowości rocznej dla wszystkich dni z wybranego zbioru danych, m jest średnią ceną indeksów dla całego szeregu czasowego.

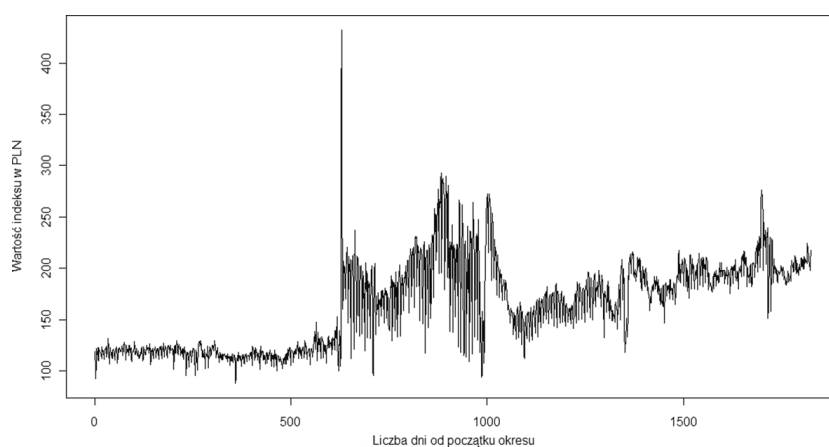
Po odsezonowaniu danych następnym krokiem jest kalibracja. Wykonana została estymacja tempa powrotu procesu do średniej, zmienności oraz częstotliwości i zasięgu skoków. Poszczególne procedury zostały dokładniej opisane w kolejnej części pracy.

Po wyliczeniu z danych potrzebnych parametrów, analitycznie wyznaczono ceny forward. Jak już było wspomniane, w tym modelu zostały one jawnie wyznaczone. Dzięki otrzymanej krzywej cen forward można było porównać kwotowane terminowe ceny dla kontraktów na giełdzie z uśrednionymi na odpowiednich okresach „życia” kontraktów, wyliczonymi analitycznie, cenami forward. Naturalnie, wartości modelowe musiały się różnić od cen rynkowych. Aby uczynić zadość warunkowi braku arbitrażu, tzn. żeby wspomniana różnica wyniosła zero, wzór analityczny poprawiono o składnik będący odpowiednio dobranym wielomianem.

Finalnie, wykonano symulację ceny spot za pomocą metody Monte Carlo. Przeprowadzono symulację 100000 trajektorii, ale w razie potrzeby lepszej dokładności można zwiększyć liczbę losowań. Estymatory błędów symulacji znajdują się na końcu rozdziału. Mając już możliwość symulowania chwilowych cen energii, należy opracować schemat wyceny porządkanych kontraktów, który został opisany w dalszej części pracy.

4.2. Szczegóły wyceny i wyniki. Zakres danych musi obejmować co najmniej rok, gdyż w przeciwnym wypadku nie byłoby jak zaobserwować i wy-

dożyć informacji na temat sezonowości rocznej. Zdecydowano się na okres od 15 kwietnia 2006 roku do 13 kwietnia 2011 roku. Dane, a konkretnie zbiór cen spot energii elektrycznej, czyli ceny na zamknięciu sesji każdego dnia, pochodzą z oficjalnej strony Towarowej Giełdy Energii S.A. Obliczenia przeprowadzono na logarytmach naturalnych z cen spot, zgodnie ze wzorem (1), nazywanych w dalszej części artykułu również indeksami giełdowymi. Na rysunku 1. widać jak zachowywała się cena energii elektrycznej przez ostatnie 5 lat. Szczególnie istotne jest zaobserwowanie cech charakterystycznych dla tego rynku, które są tu bardzo dobrze widoczne: nagłe skoki ceny, powrót do średniej i sezonowość.

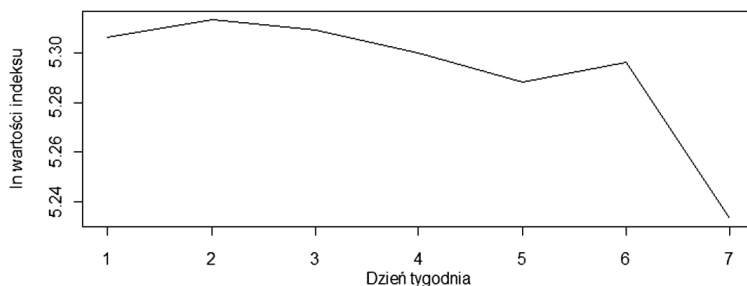


Rys. 1. Historyczne ceny spot w okresie od 14.04.2006 r. do 13.04.2011 r.

Dane z tego okresu posłużyły do wyestymowania sezonowości rocznej. Warto tutaj zaznaczyć, znowu odwołując się do rysunku 1., że po pierwszych 500 dniach cena staje się niestabilna. Przez ostatnie 500 dni średnia, do której wraca cena, stale rośnie, co utrudnia wydobycie z danych informacji na temat sezonowości rocznej. Między innymi z tego powodu do estymacji pozostałych parametrów modelu zdecydowano się na krótszy czas obserwacji, a mianowicie zostawiono dane z ostatniego roku (365 dni).

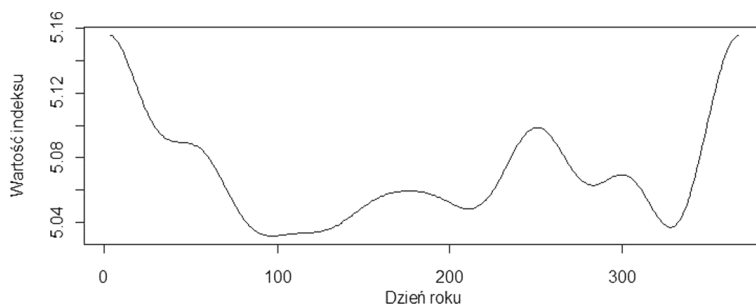
Usunięcie sezonowości tygodniowej uzyskano odejmując od wartości indeksu średnią cenę dla odpowiedniego dnia tygodnia. W ten sposób w każdym dniu tygodnia otrzymana wartość ma średnią zero. Średnie dla poszczególnych dni tygodnia widać na rysunku 2., gdzie 1 to poniedziałek, 2 wtorek, itd. Można zauważyć, że cena energii jest wyraźnie niższa w niedzielę. Jest to zgodne z intuicją, gdyż pobór energii w dni robocze jest wyższy niż w weekend.

Aby wyestymować sezonowość roczną, obliczono średnie miesięczne ceny energii, a następnie dopasowano, korzystając z transformaty Fouriera, funk-



Rys. 2. Historyczne średnie dla poszczególnych dni tygodnia

cję okresową przybliżającą zmienność roczną cen energii. Na rysunku 3. przedstawiono sezonowość roczną cen energii elektrycznej. Zimą, szczególnie w okresie świątecznym, jest znacznie wyższa niż latem, co podobnie jak przy sezonowości tygodniowej związane jest z wyższym poborem energii w tym czasie.



Rys. 3. Sezonowość roczna – wartość szeregu Fouriera

Aby wyestymować współczynnik powrotu do średniej α , należy dokonać regresji liniowej, gdzie zmienną objaśnianą będzie wektor przyrostów dla danych odsezonowanych, a zmienną objaśniającą wektor indeksów odsezonowanych. Wyestymowany parametr α jest skalowany do wartości jednorocznej, używając formuły odwrotnej do formuły zastosowanej przy dyskretyzacji modelu (szczegóły poniżej). Ostatecznie wyliczono wartość równą 85,9.

Następnym krokiem jest wydobycie ze zbioru indeksów informacji na temat częstotliwości pojawiania się dużych i gwałtownych skoków cen. Określenie „duże” oznacza tutaj skoki przekraczające 3,3 razy wartość odchylenia standardowego naszej próbki cen spot. Odpowiada to zdarzeniom o prawdopodobieństwie mniejszym niż 1 promil przy rozkładzie normalnym. Procedura, którą zastosowano, polega na iteracyjnym wydobywaniu z wektora cen dni, dla których przyrosty przekraczają 3,3 razy wartość odchylenia standardowego. Oczywiście odchylenie standardowe w każdym kroku spada.

Operacja powtarzana jest dopóki w kolejnej iteracji takie skoki jeszcze są. W uwzględnionym w pracy okresie czasu, skoków okazało się być 8. Częstotliwość l (w skali roku) występowania skoków jest wyliczana ze wzoru

$$(7) \quad l = \frac{n}{w} 365,$$

gdzie n to liczba skoków, tutaj 8, w jest liczbą dni w wybranym zakresie danych równą 365. Czynniki 365 jest potrzebny do annualizacji częstotliwości. Wyliczona w ten sposób częstotliwość wyniosła 8. Wyestymowane następnie odchylenie standardowe skoku wyniosło 0,24.

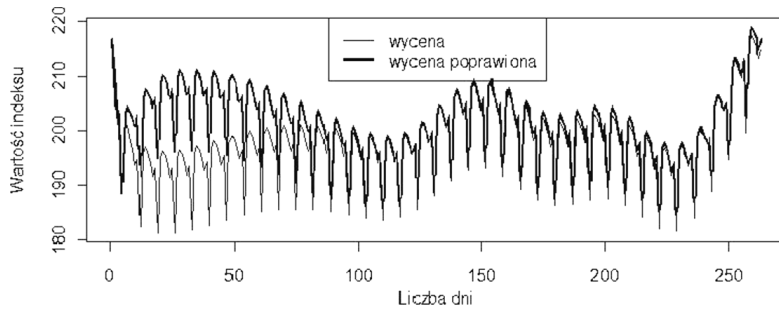
Przy kalibracji parametru σ policzono najpierw historyczną zmienność kroczącą z oknem długości 30 dni, gdzie użyto wzoru z pracy [Naz2010], s.16

$$(8) \quad \sigma(t_k) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=k-m+1}^k \left(\frac{\ln S_i - \ln S_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} - \sum_{j=k-m+1}^k \frac{\ln S_j - \ln S_{j-1}}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \right)^2},$$

$m = 30$ dni. Następnie pozostało tylko policzyć średnią wartość tak powstałego wektora zmienności. Jest ona równa 0,84. Warto podkreślić, że w tym modelu poczyniono założenie, iż zmienność w okresie symulacji jest deterministyczna i stała.

Do kalibracji modelu niezbędne były kwotowania rynkowe kontraktów forward. Dane, podobnie jak poprzednio, pobrano ze strony Towarowej Giełdy Energii S.A. Jako kryterium wyboru płynnych kontraktów przyjęto warunki, by liczba otwartych pozycji była większa od 0. Wówczas ich liczba na dzień 13 kwietnia 2011 roku wyniosła 5. Założenie braku arbitrażu jest spełnione, ponieważ do otrzymanych w wyniku zastosowania modelu analitycznych cen forward dodano składnik wielomianowy, stopnia równego liczbie kontraktów do końca roku 2011. Dobór takiej metody można uzasadnić jej prostotą, gdyż aby ów wielomian znaleźć, tj. wyestymować jego współczynniki, wystarczy rozwiązać układ równań liniowych. Taki wielomian zawsze istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie. Argumentem wielomianu jest \sqrt{t} dla zapewnienia lepszych własności numerycznych otrzymanego układu równań (lepszy współczynnik uwarunkowania), gdzie t jest czasem w dniach. Różnicę między ceną forward wyliczoną pierwotnie ze wzoru a ceną forward z dodaną poprawką wielomianową przedstawia rysunek 4. W szczególności, pozbyto się zaburzeń w sezonowości rocznej spowodowanych przez długoterminową tendencję wzrostową średniej ceny energii elektrycznej wspomnianej na początku tego rozdziału.

Do przeprowadzenia symulacji niezbędna jest dyskretyzacja wspomnianego stochastycznego równania różniczkowego. Procedurę tę przeprowadzo-



Rys. 4. Wycena forward/wycena forward poprawiona

no opierając się na artykule [StoSim]. Jako Δt przyjęto jeden dzień.

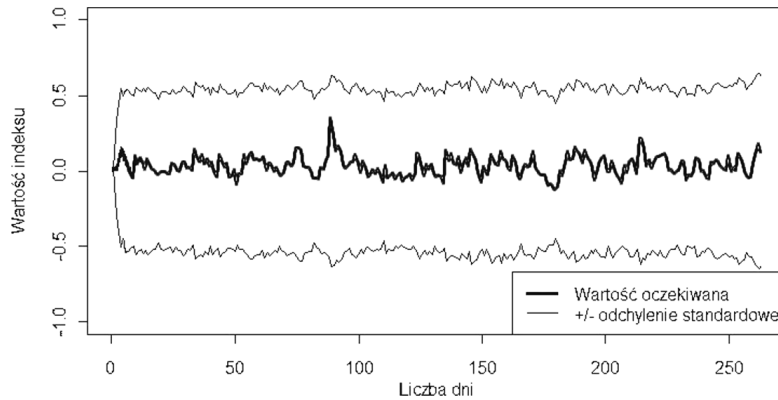
$$(9) \quad Y_t = Y_{t-1} e^{\frac{-\alpha}{365}} + \sigma \sqrt{1 - \frac{\exp(\frac{-2\alpha}{365})}{2\alpha}} N(0, 1) + B\left(\frac{l}{365}\right) N(0, \sigma_J),$$

gdzie $B(\frac{l}{365})$ to zmienna losowa o rozkładzie dwupunktowym przyjmująca wartość 1 z prawdopodobieństwem $p = \frac{l}{365}$ oraz wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1 - p)$. Co istotne, wzięto pod uwagę poprawkę wielomianową wyliczoną przy okazji cen forward, tak aby warunek braku arbitrażu był i tym razem spełniony. Co więcej, poprawka wielomianowa, dopasowując te symulacje do cen kwotowanych na rynku, uwzględnia wszystkie czynniki wpływające na przyszłe ceny, inne niż bieżąca cena i sezonowość. Wynikiem symulacji jest wektor cen spot począwszy od zadanej daty i o zadanej długości. Wektor ten jest uśrednieniem 100000 wysymulowanych przykładowych trajektorii opisanych przez zdyskretyzowane równanie.

W ten sposób można już przeprowadzić symulację Monte Carlo. Przy wycenie pominięto wartość pieniądza w czasie. Aby zwiększyć dokładność symulacji, zastosowano metodę redukcji wariancji nazywaną „anthitetic variates” opisaną w [Glass2004]. Tutaj dla każdej symulacji stworzono drugą trajektorię poprzez odwrócenie przyrostów z rozkładu normalnego oraz kierunku skoków. Na rysunku 5. przedstawiono błąd symulacji, który rzeczywiście, dzięki zastosowanej metodzie, jest znikomy.

Aby wycenić kontrakt terminowy typu forward, użyto metody opisanej wyżej do wysymulowania 100000 cen spot na przedziale czasu pomiędzy 1 czerwca a 30 czerwca 2011 roku. Następnie uśredniono w obrębie trajektorii i dni, by uzyskać symulacyjną cenę forward (otrzymano wartość 204,0253). Potem wystarczyło już tylko odjąć od niej cenę umowną równą 190 i otrzymany wynik przemnożyć przez liczbę godzin w miesiącu i przez moc przypadającą na jedną godzinę 5 MW, co dało cenę kontraktu forward 50490,99 PLN.

Schemat wyceny opcji jest następujący: symuluje się 100000 razy ceny



Rys. 5. Błąd symulacji

spot na dzień 27 maja 2011 roku, po czym dla każdej takiej wysymulowanej ceny oblicza, z wykorzystaniem wspomnianego wyżej wzoru analitycznego, średnią z cen forward przyjmując, że S_t to cena na 27 maja 2011, S_T to ceny na wszystkie dni czerwca, a wartości początkowe są równe wysymulowanym cenom spot. Otrzymano w ten sposób 100000 symulacyjnych cen forward. Wówczas od każdej z nich odjęto cenę umowną 200, z czego wzięto część dodatnią (opcja jest wykonywana jedynie gdy otrzymana wartość jest dodatnia) i wyliczono ich średnią arytmetyczną. W ten sposób otrzymano cenę opcji wynoszącą 14369,89.

Błędy symulacji oszacowano jako estymator odchylenia standardowego z otrzymanej wartości podzielony przez pierwiastek z liczby symulacji. Dla kontraktu forward to jest 96,27, podczas gdy dla opcji 201,92.

Literatura

- [CaFi2005] Álvaro Cartea, Marcelo G. Figueroa, *Pricing in Electricity Markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality*, Applied Mathematical Finance, vol. 12 (2005), str. 313–335, <http://129.3.20.41/eps/fin/papers/0501/0501011.pdf>.
- [StoSim] Monte Carlo Simulation of Stochastic Processes, http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html.
- [Naz2010] Anna Nazarova, Rüdiger Kiesel, Fred Espen Benth, *On modelling of electricity spot price*, Institute of Energy Trading and Financial Services University of Duisburg-Essen, Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo, 2010, <http://www.cmap.polytechnique.fr/euroschoolmathfi10/Nazarova.pdf>.
- [KacPaw2011] Katarzyna Kacprzak, Michał Pawłowski *Model Hestona*, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011, www.mimuw.edu.pl/apalczew/model_hestona1.pdf, www.mimuw.edu.pl/apalczew/model_hestona2.pdf.
- [Bro2007] Ewa Broszkiewicz-Suwaj, *Modele dyfuzyjne dla wyceny instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej*, Politechnika Wroclawska, Instytut Matematyki i Informatyki, 2007, <http://www.dbc.wroc.pl/Content/1881/Dokt.pdf>.

- [Wil2002] Piotr Wilman, *Modelowanie cen i zapotrzebowania na energię elektryczną*, Politechnika Wroclawska, Instytut Matematyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki, 2002,
<http://www.ioz.pwr.wroc.pl/pracownicy/weron/prace/Wilman02.pdf>.
- [Glass2004] Paul Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer, 2004.

Krzysztof Opalski, ko266790@students.mimuw.edu.pl
Katarzyna Kacprzak, kk262641@students.mimuw.edu.pl
Kamil Maciejczyk, km248755@students.mimuw.edu.pl
Michał Pawłowski, mp262734@students.mimuw.edu.pl

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski,
ul. Banacha 2, 02-097 WARSZAWA

Modelling the Polish energy market

Abstract. The paper deals with mathematical modelling of energy market. First, the model of price dynamics has been chosen. This model has been calibrated to data from the Polish Power Exchange in Warsaw. The calibrated model has been used to simulate energy prices which was used to price forward contracts and vanilla put options for energy supply. All simulations has been made in R package.

Keywords: financial mathematics, energy market, forward contract pricing, option pricing.

(wpłynęło 27 lipca 2011 r.)