MATEMATYKA STOSOWANA TOM 11/52 2010

Tadeusz Radzik (Wrocław)

Gry czasowe

(*artykuł wspomnieniowy o prof. Stanisławie Trybule*)

Streszczenie. Praca jest artykułem wspomnieniowym o prof. Stanisławie Trybule. Wprowadza ona czytelnika w tematykę tzw. gier czasowych (gamet of timing), będących w kręgu jego głównych zainteresowań w ostatnich dwudziestu latach. Gry czasowe stanowią jeden z istotnych działów studiowanych w teorii gier. Opisują one pewien szczególny rodzaj sytuacji konfliktowych między dwiema antagonistycznymi stronami, gdzie każda z nich musi zdecydować, w jakich momentach pewnego „przedziału czasowego" należy podjąć konieczne decyzje, aby ich skutek był dla niej najkorzystniejszy. Specyfiką w założeniach takich modeli jest to, że obie strony przy określaniu takich „optymalnych" momentów podejmowania swych decyzji muszą kierować się dwiema nawzajem sprzecznymi zasadami. Pierwsza z nich mówi, że dla każdej ze stron korzystniej jest podjąć decyzję jak najpóźniej, gdyż wtedy oparta jest ona na dokładniejszej informacji zdobywanej w dłuższym czasie (tj. do momentu jej podjęcia), co skutkuje większą jej efektywnością. Natomiast według drugiej zasady, wcześniej podjęta efektywna decyzja którejkolwiek ze stron eliminuje ostatecznie drugą stronę z „gry". Prof. Trybuła studiował wszechstronnie w swych pracach wiele różnych modeli gier czasowych (w 23 opublikowanych artykułach), znajdując między innymi optymalne strategie zachowania dla obu stron w tak opisanych sytuacjach konfliktowych.

W pierwszej części pracy czytelnik zostaje zaznajomiony z ogólną definicją gier czasowych i ich teoretyczną strukturą. Następnie szeroko przedstawiona jest historia rozwiązań różnych, wielodecyzyjnych gier czasowych od początków teorii, z uwzględnieniem różnych wersji ich możliwych modeli (dyskretne, nie-dyskretne, głośne, ciche, klasy I i II). W kolejnym rozdziale przedstawiona jest pewna, unifikująca teoria opisująca podstawy wzajemnych związków pomiędzy grami czasowymi dyskretnymi i nie-dyskretnymi, stanowiącymi główny podział dla tych gier. Praca kończy się rozważaniami nad pewnym, szczególnym przypadkiem gry czasowej klasy II przedstawionej w konwencji pojedynku dwóch graczy i rozwiązanej przez prof. Trybułę, dla którego bez trudu można znaleźć realistyczną interpretację modelu „walki" handlowej lub marketingowej dwóch firm na rynku. Pokazuje ona, że nawet w prostym, wydałoby się, modelu takiej gry, poszukiwanie postaci strategii optymalnych prowadzi do bardzo skomplikowanych rachunków, a zasługą autora jest to, że potrafił wyprowadzić z nich zwarte explicite formuły strategii umożliwiające dowiedzenie ich optymalności.
Słowa kluczowe: gry czasowe, głośne, ciche, klasy I i II, dyskretne, nie-dyskretne, optymalne, historia gier czasowych.

1. Wstęp. Profesora Stanisława Trybułę spotkałem po raz pierwszy w wrześniu roku 1972, kiedy to rozpocząłem pracę w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej, dołączając do grupy asystentów uczestniczących w prowadzonym przez niego seminarium ze statystyki i teorii gier. Prof. Trybuła zafascynowany już wtedy problematyką gier czasowych, spowodował, że ten entuzjazm udzielił się mnie i trójce moich kolegów, Antoniemu Styszyńskiemu, Krzysztofowi Orłowskiemu i Andrzejowi Cegielskiemu. I tak w okresie następnych dziesięciu lat bardzo aktywnie włączyliśmy się w badania tych gier, czego owocem było powstanie w ramach naszej czwórki około 25 prac zawierających wiele istotnych uogólnień dotychczasowych wyników. Należy tu wspomnieć, że bez entuzjazmu Profesora, bez Jego wielogodzinnych dyskusji z nami, i bez Jego idei i pomysłów, którymi się szczodrze z nami dzielił, większość z tych prac nigdy by nie powstała. Tak więc, mimo, że prof. Trybuła nie pojawił się formalnie jako współautor tych prac, poprzez swoje zaangażowanie, pomoc i dyskusje w trakcie ich powstawania, był On realnie ich współautorem. Dodatkowym efektem opieki Profesora nad naszą czwórką były cztery nasze doktoraty i jedna habilitacja – wszystkie w problematyce gier czasowych.

W latach następnych, ja i moi koledzy powoli „odchodziliśmy” od gier czasowych, przechodząc do badań w innych dziedzinach. Jednakże wtedy, już w latach dziewięćdziesiątych, prof. Trybuła powrócił do swej fascynacji grami czasowymi i ostatnie kilkanaście lat swego życia poświęcił ich dalszemu badaniu. W tym okresie opublikował 23 prace z gier czasowych, badając różnorakie ich modele, co omawiam bardziej szczegółowo w podrozdziale 3.8. Oczywiście wkładem prof. Trybuły w rozwój teorii gier czasowych są nie tylko Jego własne prace z tej tematyki, ale także prace całej naszej czwórki, o czym już wcześniej wspomniałem. Dlatego też, w rozdziale 3. omawiam historię rozwoju gier czasowych, gdzie nasz wkład (a więc i Profesora) jest wyraźnie pokazany.

Jeśli chodzi o organizację niniejszego artykułu, to jest ona następująca. Rozdział 2 zapoznaje czytelnika z ogólną definicją gier czasowych i wprowadza w ich tematykę. Rozdział 3 omawia szczegółowo historię gier czasowych. Rozdział 4 jest poświęcony wprowadzeniu czytelnika w teorię związków między grami czasowymi „dyskretnymi” i „ciągłymi”, co jak wydaje się, pozwoli rozbudować intuicje umożliwiające mu lepsze zrozumienie tych gier. W rozdziale 5. omawiam pewien szczególny model gry czasowej badany i rozwiązany w jednej z prac przez prof. Trybułę. Pokazuje ona szczególne zdolności profesora radzenia sobie z „komplikacjami rachunkowymi” przy poszukiwaniu spójnych formuł opisujących badane obiekty.

2. Wprowadzenie do ogólnej definicji gier czasowych. W roku 1948, amerykańska korporacja RAND (RAND Corporation) stworzyła zespół naukowców złożony z matematyków, statystyków, ekonomistów i psychologów do badania różnych problemów związanych z aspektami „niepewności” w ówczesnym globalnym świecie. Jednym z rezultatów tych studiów, osiągniętych w ramach tego programu, było rozwiązanie wielu zagadnień sformułowanych w postaci odpowiednich problemów dla dwuosobowych gier o sumie zerowej, nazywanych pojedynkami, czy też grami czasowymi (kiedy opisywały zjawiska w nieco ogólniej). Jeden z członków tego zespołu, matematyk David Blackwell, szczególnie mocno przyczynił się do rozwinięcia problematyki sformułowania w języku teorii gier wielu praktycznych problemów i do znalezienia rozwiązań dla wielu takich gier. Współpracował on z wielu innymi znanymi matematykami, między innymi z A. Girshickiem, L. S. Shapleyem, R. Bellmanem i I. Glicksbergiem, inicjując w tamtym czasie powstanie nowej problematyki w ramach gier o sumie zerowej i trafnie rozpoznając szeroki zakres możliwych zastosowań gier czasowych, w szczególności w opisywaniu i wyjaśnianiu różnych konfliktowych sytuacji na polu ekonomii i na polu militarnym.

Od tego czasu zostało sformułowanych wiele ogólnych problemów w dziedzinie tych gier i otrzymano wiele interesujących wyników. Jednak, żeby można było powiedzieć o tym coś więcej, musimy podać na początku definicję gry czasowej w formie na tyle ogólnej, żeby znalazła się tam cała bogata klasa takich gier studiowanych w literaturze. Zrobimy to w nieco innej (ale w równoważnej) konwencji, niż pionierzy tej dziedziny.

Rozważmy następujący model gry o sumie zerowej: w grze bierze udział dwóch graczy, I i II (opisywanych także w dalszej części pracy liczbami 1 i 2), z początkowymi wielkościami odpowiednio E_1 i E_2 pewnych „jednorodnych zasobów”. Zakłada się, że gracze mogą w dowolny sposób „utylizować/rozprowadzać” część lub całość swoich zasobów w pewnym ograniczonym przedziale czasowym, przyjętym dla obu graczy jako przedział $[0, 1]$. Rozprowadzanie zasobów odbywa się więc w czasie.

W konsekwencji, zachowanie graczy w tej grze może być opisane pewną parą (μ_1, μ_2) dwóch miar na przedziale $[0, 1]$. Miary te odzwierciedlają sposób rozprowadzania zasobów przez graczy.

Dalej zakłada się, że dla każdego możliwego „wyniku gry” w postaci pary miar (μ_1, μ_2), gracz I „wygrywa” od gracza II wartość $K(\mu_1, \mu_2)$, gdzie K jest pewną ustaloną „funkcją wypłaty”. Celem gracza I jest zmaksymalizowanie wygranej $K(\mu_1, \mu_2)$, podczas gdy gracz II dąży do jej zminimalizowania. W opisie i dokładniejszej analizie takiej gry następna jej cecha musi zostać „dodefiniowana”. Mianowicie to, czy oponent gracza i, $i = 1, 2$, jest w stanie śledzić historię gry, tzn. czy może on na bieżąco obserwować sposób rozdzielania zasobów przez gracza i? Jeśli tak, mówimy, że gracz i dysponuje zasobami *głośnymi.* Jeśli nie, to mówimy, że dysponuje on zasobami *cichymi.* Tak więc wskazany typ zasobów graczy prowadzi do jednego z trzech możliwych typów gier czasowych: gra Γ_{gg} (*głośna*), w której obaj gracze dysponują głośnymi zasobami, Γ_{cc} (*cicha*), w której obaj gracze dysponują zasobami cichymi, oraz gra Γ_{gc}, (*mieszana*), w której gracz I ma głośne, a gracz II ciche zasoby.

Jest oczywiste, że możliwa struktura strategii zachowania gracza w grze zależy istotnie od typu zasobów jego przeciwnika i jest o wiele bardziej skomplikowana w sytuacji, gdy te zasoby są głośne, niż gdy są ciche.

Nietrudno jednak zauważyć, że każda taka *uogólniona gra czasowa* jest całkowicie zdeterminowana przez następujące dwa czynniki: (1) przez informację o typie zasobów (ciche, głośne) będących w dyspozycji graczy i (2) przez modyfikację tej uogólnionej gry czasowej polegającej tylko na tym, że typ zasobów graczy zostaje zamieniony na „cichy”, czyli gracze zostają pozbawieni wszelkiej możliwej informacji o zachowaniu swych przeciwników w czasie gry. Ta modyfikacja, uniezależniająca grę czasową od typu zasobów graczy, będzie dalej nazywana jej *grą bazową*, a jej postać normalną opiszemy przez

$$\Gamma = \langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, K\rangle, \tag{1}$$

z następującą interpretacją: dla $i = 1, 2$, zbiory $\mathcal{E}_i$ są zbiorami elementów opisujących wszystkie możliwe realizacje rozprowadzenia zapasów przez odpowiednio graczy I i II, „wzdłuż” przedziału czasowego $[0, 1]$ (wygodnie jest te realizacje utożsamić z miarami na $[0, 1]$), a K jest funkcją wypłaty (dla gracza I), określoną na wszystkich parach takich realizacji.

I tak na przykład w grze o typie pojedynku na przedziale czasowym $[0, 1]$, w którym obaj gracze dysponują tylko po jednej akcji, można każdą z nich utożsamić z zapasami wielkości 1, a wszystkie możliwe realizacje rozprowadzenia zapasów graczy mogą być opisane (niezależnie od rodzaju tych akcji — typu głośnego lub cichego) przez dowolne pary liczb (x, y) z przedziału czasowego $[0, 1]$ oznaczających odpowiednio momenty utylizacji akcji graczy I i II. Z kolei każdą taką parę liczb (x, y) można utożsamić z parą miar probabilistycznych $(\delta(x), \delta(y))$ skoncentrowanych całkowicie w punktach x i y, lepiej odzwierciedlających realizację utylizacji „niepodzielnych” zapasów (o wielkości 1) obu graczy, czyli ich akcji. A więc gry bazowe dla wspomnianych wyżej gier czasowych o typie pojedynków zarówno z akcjami cichymi, jak i głośnymi są identyczne, ze wspólną ich funkcją wypłaty $K(x, y) \equiv K(\delta(x), \delta(y))$ i z identycznymi zbiorami strategii graczy $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\delta(z) : z \in [0, 1]\}$.

Wobec tego, co powiedziano powyżej, jest naturalnym założyć o grze bazowej (1) dowolnej uogólnionej gry czasowej, że dla $i = 1, 2$:

(**A1**) *przestrzeń strategii* $\mathcal{E}_i$ *gracza* i *jest pewnym podzbiorem klasy wszystkich miar* μ_i *na zbiorach borelowskich przedziału* $[0, 1]$*, spełniających warunek* $\mu_i([0, 1]) \le E_i$ (tu $\mu_i([0, t))$ jest interpretowana jako ta wielkość zasobów i-tego gracza, która została wykorzystana do momentu t, a sama μ_i oznacza strategię czystą gracza);

(**A2**) $K : \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \to R$ *jest funkcją wypłaty* (opisującą oczekiwaną wygraną przez gracza 1 wypłacaną przez gracza 2).

Można natychmiast zauważyć, że postać normalna gry Γ_{cc} jest identyczna z jej grą bazową Γ, ale nie jest to dalej prawdziwe dla gier Γ_{gg} i Γ_{gc}. W pracy Radzika i Goldmana [30] pokazano, że postać normalna gry Γ_{gc} jest całkowicie zdeterminowana przez grę bazową Γ i informację o typie zasobów graczy, i to samo pozostaje prawdziwe jedynie dla pewnych przypadków gry Γ_{gg}. Ogólnie jednak, problem wzajemnych związków pomiędzy grami Γ i Γ_{gg} jest bardzo złożony i raczej daleki od ostatecznego rozwiązania. W tejże pracy pokazano również, że jeśli gra bazowa Γ ma wartość v osiąganą w pewnych strategiach czystych (μ_1, μ_2), to wszystkie gry czasowe Γ_{cc}, Γ_{gc}, Γ_{cg} i Γ_{gg}, dla których Γ jest ich wspólną grą bazową, mają taką samą wartość v, a (μ_1, μ_2) jest parą strategii optymalnych graczy we wszystkich tych czterech grach.

Jeśli gra bazowa Γ, a więc i równoważna jej Γ_{cc}, nie mają wartości w strategiach czystych, wtedy można badać ich probabilistyczne rozszerzenia, szukając wartości gry Γ_{cc} i optymalnych strategii mieszanych graczy. Wtedy jednak pozostałe trzy gry czasowe Γ_{gc}, Γ_{cg} i Γ_{gg}, wywodzące się od tej gry bazowej, będą już najczęściej miały inną wartość i inne strategie optymalne (czyste lub mieszane) dla graczy.

Rozważmy teraz następną możliwą właściwość zasobów graczy, które mogą być dwojakiego rodzaju: *niepodzielnego* — kiedy zasoby gracza składają się jedynie z pewnej skończonej liczby niepodzielnych „akcji", każda o tej samej wielkości 1, i każda z nich może być „zutylizowana" tylko w jakimkolwiek momencie przedziału czasowego $[0, 1]$; oraz drugi rodzaj zasobów: *podzielny* — gdy gracz je posiadający jest zdolny rozdzielać je w czasie w sposób całkowicie dowolny (ciągły lub nieciągły), w tym przedziale. To daje asumpt do rozważania następnych trzech typów gier czasowych: *dyskretna* — gdy obaj gracze mają zasoby tylko niepodzielnego typu, *niedyskretna* — gdy obaj mają zasoby podzielne, oraz *mieszana* w sytuacji, gdy jeden z graczy ma zasoby jedynie podzielne, a drugi jedynie niepodzielne. Tak więc modele gier czasowych mogą być analizowane pod kątem różnych możliwych konfiguracji właściwości zasobów (głośne, ciche, dyskretne i niedyskretne). W pracy będziemy wykorzystywać symbole $\Gamma_{gg}(k, l)$, $\Gamma_{cc}(k, l)$ lub $\Gamma_{gc}(k, l)$ dla oznaczania dyskretnych gier czasowych z odpowiednio k i l niepodzielnymi akcjami będącymi w dyspozycji graczy 1 i 2, i z odpowiednim typem akcji (głośny, cichy). Analogicznie, przez $\widehat{\Gamma}_{gg}(E_1, E_2)$, $\widehat{\Gamma}_{cc}(E_1, E_2)$ lub $\widehat{\Gamma}_{gc}(E_1, E_2)$ będą oznaczane takie niedyskretne gry czasowe, gdzie E_1 i E_2 są wielkościami zasobów posiadanych przez graczy. W końcu, $\widetilde{\Gamma}_{gg}(k, E)$

i $\widetilde{\Gamma}_{cc}(k, E)$ oznaczają takie gry czasowe, gdzie gracz 1 ma k niepodzielnych akcji, a gracz 2 ma tylko podzielne zasoby w ilości E.

Historycznie, pojęcie klasycznych *pojedynków* (*dyskretnych* i *niedyskretnych*) jest zarezerwowane dla pewnej podklasy uogólnionych gier czasowych, takich, że funkcja wypłaty K ich bazowych gier Γ (opisująca wygraną gracza 1) jest zgodna z następującymi pięcioma założeniami o grze. Mianowicie, zakłada się wtedy dodatkowo:

(**B1**) *dla* $i = 1, 2$, *gracz* i *podejmujący jedną ze swoich akcji (jakąkolwiek niepodzielną jednostkę ze swoich zasobów) w pewnym momencie* $t \in [0, 1]$, *„odnosi sukces" z prawdopodobieństwem* $P_i(t)$; o funkcji $P_i(t)$, tzw. *funkcji celności* lub *sukcesu* związanej z tym graczem i znanej obu graczom, (zwykle) zakłada się, że jest niemalejąca i ciągła, spełniająca równości, $P_i(0) = 0$ i $P_i(1) = 1$;

(**B2**) *gracze podejmują swoje działania w grze niezależnie od siebie, tj. nie uzyskują żadnej informacji w czasie gry o zachowaniu swych przeciwników*;

(**B3**) *zdarzenia opisujące nieodniesienie sukcesu przez gracza w każdych dwu różnych, rozłącznych podprzedziałów przedziału czasowego* $[0, 1]$ *są niezależne*;

(**B4**) *gra się kończy w pierwszym momencie odniesienia sukcesu przez któregokolwiek z graczy, lub, jeżeli to nie nastąpi, w chwili* $t = 1$;

(**B5**) *wygraną w grze dla gracza 1 definiuje się jako* $+1$, -1 *lub 0, odpowiednio w następujących trzech przypadkach: (a) gra kończy się sukcesem tylko gracza 1; (b) tylko gracz 2 odnosi sukces; (c) gra się kończy wspólnym sukcesem obu graczy, lub żaden z graczy nie odnosi sukcesu w grze.*

Dla pojedynków dyskretnych typu $\Gamma_{gg}(k, l)$, $\Gamma_{cc}(k, l)$ lub $\Gamma_{gc}(k, l)$ pięć dodatkowych założeń wprowadzonych powyżej determinuje jednoznacznie funkcję wypłaty K w bazowej, wspólnej grze Γ. Można ją równoważnie przedstawić, jako funkcję K $k + l$ zmiennych, zdefiniowaną na produkcie zbiorów

$$X = \{\bar{x}_k \in [0, 1]^k : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq 1\}$$

i

$$Y = \{\bar{y}_l \in [0, 1]^l : 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_l \leq 1\};$$

tu x_i i y_j opisują momenty, w których odpowiednio gracz 1 podejmuje swoją i-tą akcję, a gracz 2 podejmuje swoją j-tą akcję. Teraz po utożsamieniu wektorów $\bar{x}_k$ z miarami μ_1 o całkowitej masie k i skoncentrowanymi we współrzędnych x_i wektora $\bar{x}_k$ z masą 1 w każdym z nich (i analogicznie dla $\bar{y}_l$), pojedynki dyskretne pozostają w całkowitej zgodności z konwencją definicji gry bazowej Γ.

Jeśli chodzi o pojedynki niedyskretne, to funkcja wypłaty K w ich grze bazowej Γ nie jest jednoznacznie wyznaczona przez wcześniej postawione warunki (B1)–(B5). Ale, jak okazuje się, po dodaniu do nich jeszcze jednego warunku (także bardzo blisko związanego z dyskretnymi i niedyskretnymi pojedynkami), jednoznaczność funkcji K może być zapewniona. Będzie to szeroko dyskutowane w rozdziale 4. Natomiast w następnym rozdziale przedstawiamy historię badań i uzyskanych wyników w dziedzinie wielodecyzyjnych gier czasowych.

3. Historia rozwiązań wielodecyzyjnych gier czasowych. Od roku 1948, kiedy to zostały sformułowane pierwsze modele pojedynków dyskretnych, otrzymano wiele interesujących rezultatów w dziedzinie gier czasowych. Główną trudnością w badaniu takich gier była (i jest w dalszym ciągu) sytuacja, że wciąż nie znamy takich ogólnych twierdzeń w teorii gier, które dawałyby odpowiedź na pytanie o istnieniu wartości gier czasowych i optymalnych strategii graczy. Nawet w najprostszych przypadkach dyskretnych, cichych pojedynków, funkcja wypłaty jest funkcją nieciągłą. Z drugiej strony, struktura pojedynków z akcjami głośnymi jest niesłychanie złożona, ponieważ strategie graczy muszą zależeć nawzajem od napływającej w czasie gry informacji o zachowaniu ich oponentów w całym przedziale czasowym. W ten sposób gry te stają się w istocie grami ekstensywnymi z nieciągłymi funkcjami wypłaty i z kontinuum możliwych alternatyw w każdej pozycji.

To krótkie wprowadzenie wystarczająco zaznajamia czytelnika z potencjalnymi, ogromnymi trudnościami, jakie pojawiają się przy badaniu gier czasowych. Poniżej, w dziewięciu częściach, przedstawiamy historię problemów i uzyskanych wyników w tej dziedzinie.

3.1. *Początki teorii.* Niech $\Gamma(k,l)$ oznacza klasę pojedynków dyskretnych (gier czasowych), zawierających takie gry z cichymi i głośnymi akcjami w trzech podstawowych konfiguracjach, tj. gier $\Gamma_{gg}(k,l)$, $\Gamma_{cc}(k,l)$ i $\Gamma_{gc}(k,l)$. Pierwsze przypadki gier $\Gamma(1,1)$ zostały sformułowane i rozwiązane przez amerykańskich matematyków w latach 1948–1953, w ramach raportów RAND Corporation. W szczególności tacy matematycy, jak Blackwell, Shiffman, Girshick, Bellman, Glicksberg i Shapley sformułowali i rozwiązali wiele typów różnych modeli pojedynków.

Jeśli chodzi o pierwsze, ważniejsze prace o pojedynkach typu $\Gamma(1,1)$, to możemy tu wyliczyć prace Blackwella [2, 3], Blackwella i Girshicka [4] oraz Bellmana i Girshicka [1]. Pierwsze dwie prace analizują pojedynki z dowolnymi funkcjami celności. W pierwszej z nich znaleziono rozwiązanie ogólnego głośnego pojedynku $\Gamma_{gg}(1,1)$, przy osłabionym założeniu, że funkcje celności nie muszą być monotoniczne. Z kolei, druga z tych prac daje rozwiązanie ogólnego cichego pojedynku $\Gamma_{cc}(1,1)$, przy czym zastosowano tam pewne rozszerzenie techniki poszukiwania tzw. optymalnych strategii wyrównujących. W następnych dwóch pracach są studiowane nieco wzbogacone modele pojedynków, przy założeniu, że $P_1(t) = P_2(t) = t$ dla $t \in [0,1]$. Mianowicie, w pierwszej z nich jest analizowana gra $\Gamma_{gg}(1,1)$ przy założeniu posiadania losowych akcji (tj. możliwych do podjęcia tylko z pewnym prawdopodobieństwem) przez graczy, podczas gdy w drugiej pracy jest studiowany pojedynek $\Gamma_{cc}(1,1)$ na przedziale czasowym $[c,1]$, gdzie $c \in (0,1)$.

3.2. *Gry czasowe klasy I i II.* Najbardziej ogólne wyniki w dziedzinie cichych gier czasowych na kwadracie jednostkowym typu $\Gamma_{cc}(1,1)$, z ogólną funkcją wypłaty $K(x,y)$ ściśle monotoniczną po każdej zmiennej, należą do Shiffmana [33] — dla modelu symetrycznego ($K(x,y) = -K(y,x)$), i do Karlina [12] — dla modelu niesymetrycznego. Pierwszy z tych autorów pokazał, że rozwiązanie w przypadku symetrycznym, które jest identyczne dla obu graczy, przybiera jedną z pięciu możliwych postaci i może być uzyskane przez rozwiązanie pewnego równania całkowego drugiego rodzaju. Karlin [12] rozszerzył rezultat Shiffmana do przypadku niesymetrycznego, pokazując, że analogiczna metoda prowadzi do konieczności przeanalizowania czternastu możliwych przypadków. Metoda znajdowania rozwiązań dla gier czasowych w obu wspomnianych pracach odwołuje się w sposób istotny do teorii dodatnich operatorów całkowych.

Ogólnie zakłada się o funkcji wypłaty $K(x,y)$ w takich grach, że jest niemalejąca względem x i nierosnąca względem y odpowiednio poniżej i powyżej przekątnej, i z możliwymi nieciągłościami na niej. Takie gry (zawierające w sobie także gry czasowe Γ_{cg}) nazywane są w literaturze *grami czasowymi klasy II.* Warto tu także wspomnieć, że były również badane gry czasowe klasy II w wersji gier o sumie niezerowej, a pewne częściowe rezultaty można znaleźć w pracy Sudżute [36].

Następny ogólny wynik dotyczący gier $\Gamma(1,1)$ znajduje się w pracy Glicksberga [11]. Autor ten znalazł rozwiązanie ogólnych dyskretnych głośnych gier czasowych typu $\Gamma_{gg}(1,1)$. Gry takie, nazywane w literaturze *grami czasowymi klasy I*, tym się różnią od analogicznych gier czasowych klasy II, że wartości ich funkcji wypłaty $K(x,y)$ nie zależą od większej ze zmiennych x, y. Poza tym, niezależnie od poprzedniego autora, również Karlin [12] otrzymał rozwiązanie tego problemu, nawet w nieco pełniejszej postaci, stosując metodę sprowadzenia tych gier do granicy pewnego ciągu gier czasowych klasy II i analizy granicznych własności ich strategii optymalnych.

3.3. *Głośne dyskretne pojedynki.* Omówimy teraz historię bardziej złożonych dyskretnych gier czasowych $\Gamma_{gg}(k,l)$ z liczbą posiadanych akcji przez graczy większą od 1. Niestety, brak tu rezultatów o takim stopniu ogólności, jakie zostały otrzymane dla gier czasowych klasy I i II przez Glicksberga i Karlina. Mimo to rozwiązano wiele interesujących i bardzo trudnych problemów dotyczących tej tematyki. Pierwszy z tych rezultatów znajduje się w książce Blackwella i Girshicka [5], gdzie autorzy znaleźli rozwiązanie głośnego pojedynku $\Gamma_{gg}(k,l)$ z dowolną liczbą akcji u graczy, k, $l \geq 1$, i z równymi funkcjami celności $P_1(t) = P_2(t) = t$. Autorzy pokazali, że wszystkie te pojedynki $\Gamma_{gg}(k,l)$ mają wartości i skonstruowali ε-optymalne strategie dla obu graczy o rekursywnej strukturze. Niestety, ich metoda nie pozwala na rozwiązanie takich pojedynków przy założeniu $P_1(t) \neq P_2(t)$.

Następne istotne uogólnienie ostatniego rezultatu należy do Foxa i Kimeldorfa [9], którzy rozwiązali głośny dyskretny pojedynek $\Gamma_{gg}(k,l)$ z ogólnymi, ciągłymi i niemalejącymi funkcjami celności, z ograniczeniem $P_i(0) = 0, P_i(1) = 1$ dla $i = 1$, 2. Znalezione tu ε-optymalne strategie mają również rekursywną strukturę, ale o wiele bardziej złożoną w porównaniu do znalezionych w poprzednim przypadku. Jednakże ich metoda, pomimo że była oparta na wielce złożonych i subtelnych rozważaniach, okazała się nieefektywna przy próbie rozwiązania tego pojedynku $\Gamma_{gg}(k,l)$ z całkowicie ogólnym założeniem o funkcjach celności, $0 \leq P_i(0) < P_i(1) \leq 1$, $i = 1$, 2. Kolejny autor, Żadan [63], otrzymał następny, bardzo istotny wynik dotyczący pojedynku $\Gamma_{gg}(k,l)$. Pokazał on z pomocą wielce skomplikowanej teorii, specjalnie zbudowanej dla potrzeb tego problemu, że te gry, rozważane jedynie przy założeniu ciągłości funkcji celności z warunkiem, $P_i(0) = 0, P_i(1) < 1$ dla $i = 1$, 2, wciąż mają wartość i znalazł postać ε-optymalnych strategii dla obu graczy. Należy tu wspomnieć, że warunek o funkcjach celności, przyjęty przez Żadana, nie mógł być pominięty ze względu na zastosowaną tam metodę rozwiązania problemu.

Założenie, $P_i(0) = 0$, $i = 1$, 2, przyjęte w ostatnich trzech pracach dotyczących pojedynku $\Gamma_{gg}(k,l)$ było konieczne ze względu na zaadaptowane tam metody. Znalezione ε-optymalne strategie miały taką rekursywną strukturę, która nie mogła być przeniesiona na ogólniejszy przypadek gier $\Gamma_{gg}(k,l)$ z ograniczeniem, $P_i(0) \geq 0$, $i = 1$, 2. To ograniczenie zostało ostatecznie przezwyciężone w pracy Radzika [28], gdzie znaleziono kompletne rozwiązanie pojedynku $\Gamma_{gg}(k,l)$ z k, $l \geq 1$, przy bardzo ogólnych założeniach, że funkcje celności są funkcjami ciągłymi, niemalejącymi, spełniającymi nierówności, $0 \leq P_i(0) \leq P_i(1) \leq 1$, $i = 1$, 2.

W tym celu została zbudowana specjalna teoria do analizy własności strategii optymalnych i wartości pewnych gier macierzowych z niepełnymi zbiorami dopuszczalnych par czystych strategii graczy. Okazało się, że w przypadku $P_i(0) > 0$ dla $i = 1$, 2, struktura ε-optymalnych strategii jest o wiele bardziej skomplikowana w porównaniu z przypadkami rozważanymi w trzech wspomnianych pracach. Na koniec warto dodać, że pewne asymptotyczne własności głośnych dyskretnych pojedynków (gdy liczby akcji graczy dążą do nieskończoności) były dyskutowane w pracy Kimeldorfa i Langa [15]. Jednakże, pomimo głębokich i mocno złożonych rezultatów otrzymanych w tej dziedzinie, wciąż nie wiemy, jak rozszerzyć wyniki Glicksberga i Karlina dla gier czasowych $\Gamma_{gg}(1,1)$ klasy I do analogicznych gier $\Gamma_{gg}(k,l)$ przy założeniu k, $l \geq 1$.

3.4. *Ciche dyskretne pojedynki.* Omówimy teraz historię ogólnych cichych dyskretnych pojedynków $\Gamma_{cc}(k,l)$ z k, $l \geq 1$. Najbardziej przełomowy rezultat na tym polu znajdujemy w pracy Restrepo [31]. Jest tam pokazane, że dla wszystkich k, l cichy pojedynek $\Gamma_{cc}(k,l)$, z ciągłymi, różniczkowalnymi funkcjami celności spełniającymi warunki $P_i(0) = 0$, $P_i(1) = 1$ i $P_i'(t) > 0$ dla $i = 1$, 2 i $0 < t < 1$ zawsze ma wartość i zostały tam znalezione optymalne strategie dla obu graczy. Pomimo szalenie interesujących i ogromnie głębokich rozważań, metoda zaproponowana przez tego autora okazała się niewystarczająca do znalezienia twierdzenia uogólniającego wynik Karlina o grach czasowych klasy II do większej niż 1 liczby akcji u graczy.

Reasumując, pytanie, jak rozszerzyć rezultat Karlina do ogólnych gier czasowych $\Gamma_{cc}(k,l)$ z k, $l > 1$, pozostaje wciąż otwartym problemem. Jak dotychczas, pewne istotne uogólnienie wyniku uzyskanego przez Restrepo zostało otrzymane jedynie w dwóch pracach Cegielskiego [7, 8]. W pierwszej z nich założono, że liczby akcji będących w posiadaniu graczy są losowe, podczas gdy w drugiej pracy jest studiowany ten pojedynek przy założeniu $P_i(1) < 1$ dla $i = 1$, 2; wciąż jednak z ograniczeniem $P_i(0) = 0$ dla $i = 1$, 2, przyjętym w obu pracach. Warto tu także wspomnieć o jeszcze jednej modyfikacji gier $\Gamma_{cc}(k,l)$, gdzie w założeniach o pojedynku wprowadza się element opóźnienia co do efektu podjęcia akcji przez graczy (Orłowski i Radzik [20]).

3.5. *Mieszane dyskretne pojedynki.* Jeśli chodzi o mieszane dyskretne pojedynki $\Gamma_{gc}(k,l)$, to w tej tematyce nie są znane jakieś bardziej ogólne wyniki. Wydaje się, że tego rodzaju pojedynki są grami stwarzającymi badaczom największe trudności. Jest bardzo zaskakujące, że na przykład nawet tak prosty pojedynek jak $\Gamma_{gc}(2,1)$, przy założeniu $P_1(t) \neq P_2(t)$, pozostaje do dziś wciąż nierozwiązanym problemem. Jedynie częściowe i bardzo szczególne problemy w tej tematyce (choć mocno złożone) zostały dotychczas rozwiązane, pomimo że liczba opublikowanych prac jest raczej znacząca.

Wyliczymy jedynie kilka najistotniejszych z nich. Dotyczą one różnych modyfikacji takich mieszanych pojedynków, najczęściej z ogólnymi funkcjami celności. Kurisu [17] rozwiązał pewną klasę pojedynków $\Gamma_{cg}(1,1)$ z taką modyfikacją, że akcja gracza II ma własność „głośności" ze stałym „opóźnieniem"; tak więc ta klasa gier zawiera w sobie oba klasyczne pojedynki $\Gamma_{cg}(1,1)$ i $\Gamma_{cc}(1,1)$, jako swoje dwa ekstremalne podprzypadki. W następnej, interesującej, pracy [16], Kurisu znalazł rozwiązanie (z pomocą obliczeń komputerowych) pojedynku $\Gamma_{gc}(2,1)$ przy założeniu, $P_1(t) = P_2(t) = t$, ale zastosowana przez niego metoda nie pozwala na rozwiązanie ogólniejszych przypadków takich gier. Smith [34] rozwiązał taki model pojedynku, w którym gracz I ma jedną cichą i jedną głośną akcję, natomiast gracz II jest w posiadaniu tylko jednej głośnej akcji. Dalej, Styszyński [35] znalazł rozwiązanie ogólnego mieszanego pojedynku $\Gamma_{cg}(k,1)$ z $k>1$. Ostatnie dwa wyniki zostały uogólnione w dwóch pracach Radzika i Orłowskiego [22, 23], gdzie jest studiowany taki model pojedynku, w którym gracz II ma tylko jedną głośną akcję, natomiast gracz I może posiadać dowolną liczbę akcji cichych i głośnych, które z założenia musi podejmować w dowolnej, ale z góry zadanej kolejności, znanej graczowi II na początku gry.

Jeszcze inna modyfikacja mieszanych pojedynków typu $\Gamma(1,1)$ była studiowana w pracy Sakaguchiego [32], gdzie dopuszcza się także sytuacje, że gracze mogą nie posiadać akcji, przy czym wiedza oponentów o tym jest tylko częściowa. Należy tu także wspomnieć jeszcze o innym modelu pojedynku typu $\Gamma(1,1)$, analizowanym w dwóch pracach Teraoki ([37, 38]), gdzie wbudowana jest dodatkowa właściwość losowego momentu kończenia gry.

3.6. *Ciche niedyskretne pojedynki.* Następną klasą gier czasowych szeroko analizowanych w literaturze były ciche niedyskretne pojedynki oznaczane dalej przez $\widehat{\Gamma}_{cc}(E_1,E_2)$. Różnią się one od klasycznych cichych dyskretnych pojedynków tym, że gracze dysponują możliwością całkowicie dowolnego sposobu („ciągłego” lub „nieciągłego”) rozdzielania swoich zasobów „wzdłuż” przedziału czasowego. Kompletne rozwiązanie takiej gry można znaleźć w książce Karlina [13]. W tym modelu zakłada się, że gracze mogą rozdzielać swoje zasoby jedynie w sposób „ciągły” "wzdłuż” przedziału czasowego $[0,\infty)$, zgodnie z jakąkolwiek, ale ograniczoną intensywnością. Również Yanovskaya [62] studiowała pewną, ogólniejszą wersję pojedynku analizowanego przez Karlina. Jednakże konstrukcja funkcji wypłaty w pojedynkach niedyskretnych rozważanych w tych pracach była raczej daleka, jeśli chodzi o sformułowanie i interpretację, od analogicznych funkcji definiowanych w klasycznych dyskretnych pojedynkach.

Bliższy związek pomiędzy tymi dwoma rodzajami gier został po raz pierwszy zauważony w pracach Langa i Kimeldorfa [18, 19], gdzie autorzy sformułowali w nieco inny sposób model gry $\widehat{\Gamma}_{cc}(E_1,E_2)$ i rozwiązali ją w dwu wersjach. W pierwszej z nich autorzy rozważają cichy niedyskretny pojedynek przy założeniu, że $P_1(t)=P_2(t)$, i że gracze dysponują możliwością dowolnego, ale tylko ciągłego sposobu rozdzielania swych zasobów „wzdłuż” przedziału czasowego. W drugiej pracy podali oni rozwiązanie tego modelu wolnego już od wszelkich ograniczeń na rozdzielanie zasobów przez graczy, przy $P_1(t)\neq P_2(t)$. Strategie optymalne graczy tam znalezione są strategiami czystymi, co w konsekwencji powoduje, że pozostają one optymalne również w pojedynkach $\widehat{\Gamma}_{gc}(E_1,E_2)$ i $\widehat{\Gamma}_{gg}(E_1,E_2)$.

Następnie Positielskaya [21] znalazła postać strategii optymalnej dla gracza II w pojedynku $\widehat{\Gamma}_{gc}(E_1, E_2)$, mającą tzw. własność „wyrównywania” przeciw wszystkim istotnym strategiom gracza I, tj. własność polegającą na tym, że niezależnie od sposobu zachowania gracza I wynikiem gry jest prawie zawsze jej wartość. Warto tu także wspomnieć, że pewne asymptotyczne własności pojedynków niedyskretnych i ich związki z dyskretnymi były dyskutowane w pracy Kimeldorfa i Langa [14].

Jeśli chodzi o dwa modele gier $\widehat{\Gamma}_{cc}(E_1, E_2)$ dyskutowane powyżej (przy zdefiniowaniu ich na przedziale jednostkowym), to okazało się, że należą one do tej samej klasy cichych niedyskretnych pojedynków. Jedyną różnicą jest tylko to, że w modelu Karlina funkcje celności spełniają warunek, $P_i(1) = 1-e^{-1}$, natomiast w modelu Langa i Kimeldorfa spełniają warunek, $P_i(1) = 1$, $i = 1, 2$. (Pozostałe równości $P_i(0) = 0$ są wspólne w obu modelach). Ten fakt jest szeroko dyskutowany w rozdziale 4., gdzie funkcja wypłaty dla gier $\widehat{\Gamma}_{cc}(E_1, E_2)$ jest konstruowana w pewien nowy aksjomatyczny sposób. Ostatni z tych wyników dotyczący cichych niedyskretnych pojedynków został otrzymany w pracy Radzika [25], gdzie znaleziono rozwiązania dla takich gier przy całkowicie ogólnym założeniu: $P_i(0) \geq 0$, $P_i(1) \leq 1$ dla $i = 1$, 2. Podano tam też kompletną charakteryzację strategii optymalnych. Jest ona analogiczna do znalezionej przez Karlina dla gier czasowych klasy II. Jest raczej zaskakującym faktem, że w przypadku, $P_1(1) < 1$, $P_2(1) = 1$, gracz II ma jedynie strategię ε-optymalną. Zaproponowana metoda jest znaczącym rozszerzeniem metody z pracy Langa i Kimeldorfa [19]. Na koniec warto dodać, że pewna modyfikacja powyżej rozważanych pojedynków była analizowana w pracy Radzika i Orłowskiego [24].

3.7. *Ciche mieszane pojedynki.* Następną bardzo naturalną klasą gier czasowych są ciche mieszane pojedynki oznaczane dalej przez $\widetilde{\Gamma}_{cc}(1, E)$, w których gracz I ma jedną niepodzielną akcję i zachowuje się jak w dyskretnym pojedynku, gracz II natomiast jest w posiadaniu pewnej ilości E zasobów podzielnych i może grać zgodnie z regułami obowiązującymi w pojedynkach niedyskretnych. Dla takich modeli otrzymano dotychczas raczej niewiele istotniejszych rezultatów i wciąż brakuje dla nich koherentnej teorii.

Pierwszymi, którzy przyczynili się do sformułowania i rozwiązania pewnych różnorakich przykładów takich gier, byli Gillman, Blackwell, Shiffman, Bellman i Karlin. Wszyscy oni studiowali takie modele tych gier, w których graczowi II wolno było rozdzielać swe zasoby jedynie w sposób ciągły i z ograniczoną intensywnością. Ich związki z klasycznymi dyskretnymi pojedynkami były raczej dalekie. Na początku problem ten był studiowany w pracy Blackwella i Shiffmana [6] i innych niepublikowanych pracach Weissa, Bellmana i Blackwella. Takie modele gier z interpretacją pewnych kampanii reklamowych były prezentowane w pracy Gillmana [10]. Były one także studiowane przez Karlina [13], który zastosował nową metodę opartą w dużej mierze na lemacie Neymana–Pearsona do znalezienia postaci strategii optymalnej dla gracza I. Poza tym mamy tu jeszcze tylko dwa wyniki w tej tematyce i należą one do Radzika [26, 27]. W obydwu tych pracach są studiowane mieszane ciche pojedynki typu $\widetilde{\Gamma}_{cc}(k, E)$, ale w nieco innej wersji w stosunku do tych dyskutowanych powyżej, bliżej związanych z dyskretnymi pojedynkami. W pierwszej z tych prac podano kompletną charakteryzację rozwiązań pojedynku $\widetilde{\Gamma}_{cc}(1, E)$, w którym graczowi II wolno rozdzielać jego zasoby bez jakichkolwiek ograniczeń. W drugiej pracy analizowany jest ogólniejszy model pojedynku $\widetilde{\Gamma}_{cc}(k, E)$ przy $k > 1$. Pokazano tam, że takie pojedynki zawsze mają wartość i znaleziono optymalną strategię dla gracza II.

3.8. *Dorobek Prof. Trybuły w teorii gier czasowych.* Trybuła jest jednym z najbardziej płodnych autorów w tematyce gier czasowych. Mianowicie, jest samodzielnym autorem 21 prac ([39]–[59]) z tej dziedziny oraz współautorem dwóch monografii ([60], [61]). Jak już wspomnieliśmy we wstępie, swoje badania tych gier rozpoczął praktycznie dopiero na początku lat dziewięćdziesiątych, gdy prawie wszystkie najistotniejsze uogólnienia modeli gier czasowych zostały już wcześniej rozwiązane (w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych). Z tego też względu, Trybuła skupił się na badaniu tylko pewnych szczególnych modyfikacji klasycznych modeli pojedynków opisanych we wcześniejszych rozdziałach. Te modyfikacje najczęściej bardzo mocno komplikowały dotychczasowe modele doprowadzając do tego, że poszukiwanie strategii optymalnych graczy wymagało niesłychanego kunsztu rachunkowego autora. Ogólnie gry rozważane przez Trybułę w jego pracach mają postać pewnych, bardzo specyficznych pojedynków dwóch graczy. Zakłada się tam, że gracze mogą poruszać się względem siebie w różnoraki sposób, a także ukrywać się przed przeciwnikiem (w zależności od badanego modelu), posiadając przy tym jedną lub więcej akcji (głośnych lub cichych) dla których prawdopodobieństwo sukcesu gracza przy podjęciu akcji zależy od odległości od przeciwnika, a nie od czasu trwania pojedynku. Dalszą modyfikacją w modelach Trybuły jest dopuszczenie, że gracz może posiadać dwa rodzaje akcje, oprócz standardowych, także takie, które mogą być „użyte” dopiero w momencie spotkania graczy, a prawdopodobieństwo ich użycia może być mniejsze od jedności.

Trybuła w swoich pracach rozpatruje różnorakie warianty takich pojedynków, przy czym nieznaczne różnice w ich opisach powodują gwałtowne zmiany w znajdowanych postaciach strategii optymalnych. Wspólną cechą jego prac jest to, że otrzymywane w nich postacie strategii optymalnych są opisywane za pomocą bardzo spójnych formuł, przy czym są one konsekwencją niezmiernie skomplikowanych rozważań rachunkowych, co stanowi rzeczywiście o kunszcie autora. W ostatnim rozdziale omawiamy szczegółowo jeden z takich pojedynków

Jeśli chodzi o monografię [60], to w przeważającej części została ona poświęcona grom czasowym. Czytelnik znajdzie tu niezliczoną ilość przykładów rozwiązań gier o zróżnicowanym stopniu trudności. Ostatni rozdział książki stanowi najbardziej zaawansowaną część książki, omawiającą wielodecyzyjne gry czasowe w różnych możliwych konfiguracjach. Rozważamy tu modele dyskretne typu „m akcji przeciw n akcjom" z brakiem informacji, z częściową i z pełną informacją. W kilku oryginalnych przykładach (z rozwiązaniami) pokazujemy wielką złożoność takich gier, zwłaszcza przy poszukiwaniu strategii optymalnych graczy i ich uzasadnianiu. Drugą część tego rozdziału stanowią rozważania dotyczące niedyskretnych gier czasowych typu „M zasobów przeciw N zasobom" także przy różnej ilości informacji. Dajemy tu bogaty przegląd takich gier z ciekawymi przykładami ich rozwiązań. Rozdział ten kończy się dyskusją nad otwartymi problemami w tej tematyce. Natomiast druga monografia ([61]) jest wyraźnym rozszerzeniem poprzedniej, gdzie między innymi dodano rozdział o grach czasowych o sumie niezerowej.

3.9. *Uwagi końcowe.* Z przedstawionej dyskusji wynika, że w ostatnich kilkudziesięciu latach nie zdołano zbudować jednej, koherentnej i wystarczająco ogólnej teorii, która by satysfakcjonująco opisywała i dawała możliwość rozwiązywania całej szerokiej klasy gier czasowych. Pomimo tego, że w tym okresie rozwiązano wielką liczbę bardzo ogólnych problemów związanych z tą tematyką, musimy krytycznie przyznać, że wiele z nich dotyczy raczej wąskich i bardzo szczególnie zdefiniowanych modeli. Przyczyną tego była nie tylko ogromna złożoność modeli i różnorakie trudności z problemami związanymi z informacją, które się tam pojawiały. Po prostu wciąż brakuje nam ogólnych i efektywnych metod dla tej dziedziny.

Żeby znaleźć rozwiązanie jakiejkolwiek ogólniejszej gry czasowej, najczęściej musimy zbudować najpierw teorię specjalnie przystosowaną dla jej potrzeb. Jak dotychczas, wciąż nie ma jednorodnej teorii, która byłaby satysfakcjonująca dla szerszych klas gier czasowych. Praktycznie dysponujemy taką teorią jedynie dla gier czasowych Karlina klasy I i II, gdzie funkcja wypłaty jest definiowana przez ogólniejsze funkcje $K(x, y)$ na kwadracie jednostkowym. Niestety, ta piękna teoria jest całkowicie bezsilna przy badaniu ogólniejszych gier czasowych, w których funkcje wypłaty są zdefiniowane na przestrzeniach wielowymiarowych. Stąd też pytanie, czy istnieje jedna, ogólna teoria opisująca całość gier czasowych, pozostaje pytaniem otwartym. Na koniec warto nadmienić, że w pracy [29] zebrano kilka najistotniejszych otwartych problemów w tej dziedzinie i postawiono pewne hipotezy co do ich rozwiązań.

4. Wzajemne związki pomiędzy grami. Rozważmy jakikolwiek pojedynek, tj. grę czasową, dla której odpowiadająca jej gra bazowa Γ spełnia warunki (A1)–(A2) i (B1)–(B5) z rozdziału 2 1. Niech $P_i(t), 0 \leq t \leq 1$, będzie funkcją celności gracza i. Z definicji, $P_i(t)$ opisuje prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz i odniesie sukces w momencie t, w sytuacji, gdy „utylizuje” on jedną jednostkę ze swoich zasobów (jedną akcję) dokładnie w chwili t.

Dla dowolnego wektora $\bar{z}_m = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ spełniającego $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_m \leq 1$, niech $I(\bar{z}_m)$ definiuje miarę na $[0,1]$ z całkowitą masą m skoncentrowaną w punktach $z_1, z_2, \ldots, z_m$ z masami 1 w każdym z nich.

Dalej, dla każdej strategii μ_i gracza i i dla każdego przedziału $D \subseteq [0,1]$, definiujemy $Q_i^{\mu_i}(D)$ jako prawdopodobieństwo, że gracz i, rozdzielający swoje zasoby zgodnie z miarą μ_i, odniesie sukces w jakimkolwiek momencie przedziału D.

Okazuje się, że ogólnie, $Q_i^{\mu_i}(D)$ nie jest jednoznacznie wyznaczona przez same funkcje celności $P_i(t)$ i założenia (B1)–(B4), wcześniej wspomniane.

Z drugiej strony, funkcja zależna od dwóch zmiennych, $Q_i^{\mu_i}(D)$ okazuje się być fundamentalna przy konstrukcji wypłaty $K(\mu_1, \mu_2)$ gry bazowej Γ. Mianowicie, przy oznaczeniach

$$Q_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q_i^{\mu_i}([0,t]), \quad \bar{Q}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - Q_i(t), \tag{2}$$

wzór określający funkcje wypłaty może być łatwo wyprowadzony, jako

$$K(\mu_1, \mu_2) = \int\limits_{[0,1]} \bar{Q}_2 dQ_1 - \int\limits_{[0,1]} \bar{Q}_1 dQ_2. \tag{3}$$

Aby usprawiedliwić powyższą formułę, zauważmy, że $\bar{Q}_i(t)$ reprezentuje prawdopodobieństwo, że gracz i nie odniesie sukcesu w podprzedziale $[0,t]$. Zatem wielkość $\bar{Q}_2(t)dQ_1(t)$ jest iloczynem prawdopodobieństwa tego, że gracz 1 odniesie sukces w przedziale $(t, t+dt)$ oraz prawdopodobieństwa zdarzenia, że gracz 2 nie odniesie sukcesu przed momentem t. Zatem granica sum prawdopodobieństw (równa pierwszej całce w (3)) jest prawdopodobieństwem tego, że gracz 1 odniesie sukces przed graczem 2, zapewniając mu wypłatę +1 (z powodu warunku (B5)). Podobne argumenty stosują się do drugiej całki we wzorze (3).

W dalszej części, dla dowolnej miary μ będziemy też stosować oznaczenie

$$Q_i^{\mu}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Q_i^{\mu}([0,t)).$$

Według definicji, w pojedynku dyskretnym gracze mogą rozdzielać swoje zasoby jedynie zgodnie z miarami atomowymi postaci $I(\bar{z}_m)$. Można łatwo pokazać za pomocą założeń (B1)–(B5) z rozdziału 2, że

$$Q_i^{I(\bar{z}_m)}(t) = 1 - \prod_{s \leq t} [1 - P_i(z_s)], \quad 0 \leq t \leq 1.$$

W ten sposób, wobec (2) i (3), założenia (B1)–(B5) jednoznacznie wyznaczają grę bazową Γ pewnego dyskretnego pojedynku. Nie jest to regułą w przypadku pojedynków niedyskretnych. Aby wielkość $Q_i^{\mu_i}(t)$ była wyznaczona jednoznacznie dla wszystkich μ_i, muszą być dodane pewne nowe warunki. Poniżej przeanalizujemy trzy możliwe podejścia do konstrukcji $Q_i^{\mu_i}(t)$.

4.1. *Model I.* Ten model był rozważany w dwu równoważnych wersjach, na $[0,1]$ i na $[0,\infty)$, jako przedziałach czasowych, w pracy Blackwella i Shiffmana [6] oraz Karlina [13]. Tu zaprezentujemy go na $[0,1]$ w nieco ogólniejszej formie.

Załóżmy, że funkcja $Q_i^{\mu_i}(t)$ spełnia:

$$Q_i^{\mu_i}([t,t+h]) = \mu_i([t,t+h]) \cdot A_i(t) + o(h), \quad \text{p.w.}, \ 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

dla każdej absolutnie ciągłej miary μ_i na $[0,1]$, gdzie $A_i(t)$ jest pewną ciągłą i monotoniczną funkcją spełniającą

$$A_i(0) = 0, \qquad A_i(1) = 1. \tag{5}$$

(Funkcję $A_i(t)$ nazywamy *zmodyfikowaną funkcją celności.* Nie jest ona identyczna z funkcją celności).

Warunek (4), przez zastosowanie standardowych argumentów związanych z przejściem do granicy, prowadzi do wzoru:

$$Q_i^{\mu_i}(t) = 1 - \exp\left(- \int_{[0,t]} A_i(u) d\mu_i(u) \right), \quad 0 \le t \le 1, \tag{6}$$

dla każdej absolutnie ciągłej miary μ_i. Teraz, jeśli formalnie rozszerzymy wzór (6) do zbioru wszystkich miar μ_i, to po podstawieniu $\mu_i = I(t)$, otrzymamy

$$P_i(t) = 1 - \exp[-A_i(t)], \quad 0 \le t \le 1, \tag{7}$$

z powodu oczywistej równości $P_i(t) = Q_i^{I(t)}(t)$. Model ten jest zatem (patrz (7) i (5)) zgodny z dyskretnymi pojedynkami, gdzie funkcje celności spełniają: $P_i(0) = 0$ i $P_i(1) = 1 - e^{-1}$.

4.2. *Model II.* Lang i Kimeldorf [18] zaproponowali wymianę funkcję $A_i(t)$ w (4) na inną, zdefiniowaną na $[0,1)$ i spełniającą warunki

$$A_i(0) = 0, \quad A_i(1-) = \infty.$$

Teraz możemy powtórzyć rozważania dotyczące modelu I, żeby otrzymać w konkluzji, że model II jest zgodny z dyskretnym pojedynkiem, z $P_i(0) = 0$ i $P_i(1) = 1$.

4.3. *Model III.* Zarówno rozważania w modelu I jak i II zawierają pewne ograniczenia. Mianowicie, chociaż formuła (6) na $Q_i^{\mu_i}(t)$ jest dobrze zdefiniowana dla wszystkich miar μ_i, warunek (4) jest zgodny z (6) jedynie dla absolutnie ciągłych miar μ_i. Nie jest trudno sprawdzić, że dla nieciągłych miar warunek (4) może być sprzeczny z (6), na przykład dla $\mu_i = I(t)$ z $h \to 0$. Z drugiej strony, w modelu II, $Q_i^{\mu_i}(t)$ i przez to także niedyskretne pojedynki są zdefiniowane na $[0,1)$ zamiast na $[0,1]$. To ograniczenie zostało usunięte w pracy [26], co prezentujemy poniżej.

Niech $P_i(t)$ będzie jakąkolwiek funkcją celności na $[0,1]$ spełniającą warunki $0 \leq P_i(0)$, $P_i(1) \leq 1$, niekoniecznie monotoniczną czy ciągłą. Jest całkowicie naturalnym, żeby dla funkcji

$$\bar{Q}_i^{\mu_i}(D) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - Q_i^{\mu_i}(D) \tag{8}$$

żądać spełnienia następujących czterech warunków:

(**C1**) *dla każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq [0,1]$ i dla wszystkich $t \in D$ i $\alpha \geq 0$,*

$$0 \leq \bar{Q}_i^{\alpha I(t)}(D) \leq 1, \quad \bar{Q}_i^{I(t)}(D) = 1 - P_i(t);$$

(**C2**) *dla każdego zbioru mierzalnego $D \subseteq [0,1]$ i dla wszystkich $t \in D$ i $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$\bar{Q}_i^{(\alpha+\beta)I(t)}(D) = \bar{Q}_i^{\alpha I(t)}(D) \cdot \bar{Q}_i^{\beta I(t)}(D)\ ;$$

(**C3**) *dla dowolnej miary μ na $[0,1]$ i dla wszystkich niepustych mierzalnych zbiorów $D \subseteq [0,1]$,*

$$\inf_{t \in D} \bar{Q}_i^{\alpha I(t)}(D) \leq \bar{Q}_i^{\mu}(D) \leq \sup_{t \in D} \bar{Q}_i^{\alpha I(t)}(D),$$

gdzie $\alpha = \mu(D)$;

(**C4**) *dla każdego ciągu $\{D_m\}$ parami rozłącznych podzbiorów zbioru $[0,1]$, i dla każdej miary μ na $[0,1]$,*

$$\bar{Q}_i^{\mu}\left(\bigcup_m D_m\right) = \prod_m \bar{Q}_i^{\mu}(D_m).$$

Zauważmy, że w istocie warunki (C1) i (C4) są powtórzeniem założeń (B1) i (B3) z rozdziału 2. Pozostałe dwa warunki są nowe. Wszystkie cztery mają prostą, bardzo naturalną interpretację. Teraz zaprezentujemy główny rezultat z nich wynikający, który daje precyzyjną i jednoznaczną odpowiedź na pytanie o możliwą postać funkcji $Q_i^{\mu}(t)$.

TWIERDZENIE 4.1. *Dla dowolnej mierzalnej funkcji celności $P_i(t)$ na $[0,1]$ warunki* (C1)–(C4) *jednoznacznie wyznaczają funkcję $Q_i^{\mu}(t)$ w postaci*

$$Q_i^{\mu}(t) = 1 - \exp\left(\int\limits_{[0,t]} \log[1 - P_i(u)]d\mu(u)\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{9}$$

dla wszystkich miar μ na $[0,1]$. (*Wg definicji*: $\exp(-\infty) = 0$, $\log 0 = -\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$).

Dowód. Wobec (8), żeby pokazać (9), wystarczy sprawdzić, że warunki (C1)–(C4) są równoważne następującemu stwierdzeniu: dla dowolnej miary μ na $[0,1]$ i dla wszystkich mierzalnych zbiorów $D \subseteq [0,1]$,

$$\bar{Q}_i^{\mu}(D) = \exp\left(\int\limits_D \log[1 - P_i(u)]\, d\mu(u) \right). \tag{10}$$

Mianowicie, nie jest trudno sprawdzić, że (C1) i (C2) implikują (10) dla wszystkich miar postaci $\mu = \alpha I(t)$ spełniających $\alpha \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$. Następnie łatwo pokazujemy z pomocą definicji całki Lebesgue'a, że warunki (C3) i (C4) są wystarczające dla zachodzenia równości (10) dla wszystkich miar. Przeciwna implikacja jest natychmiastowa.

To kończy naszą konstrukcję modelu III, ponieważ pokazaliśmy, że formuła (6) z funkcją $A_i(t)$ spełniającą 7, rozszerzona do zbioru wszystkich miar, jest jednoznacznym rozwiązaniem wyznaczonym przez warunki (C1)–(C4). Ten fakt jest natychmiastową konsekwencją wzorów (7), (8) i (9).

Uwaga 4.1. Jeżeli $P_i(t)$ jest monotoniczna, Twierdzenie 3.1 zachodzi po zastąpieniu zbiorów mierzalnych D i D_m w (C1)–(C4) przez podprzedziały przedziału $[0,1]$.

Uwaga 4.2. Miara $\mu = \alpha I(t)$ odpowiada strategii gracza podjęcia cząstki zasobów w ilości α dokładnie w momencie t. Ze wzoru (9) dostajemy, że dla takiej strategii μ, $Q_i^{\mu}(t) = 1 - [1 - P_i(t)]^{\alpha}$. Możemy to zinterpretować w ten sposób, że posiadanie cząstki zasobów w ilości α przez gracza w pojedynku z funkcją celności $P_i(t)$ jest równoważne posiadaniu jednej akcji (o masie 1) w pojedynku z nową funkcją celności $Q_i(t) = 1 - [1 - P_i(t)]^{\alpha}$.

Uwaga 4.3. Warto też zauważyć, że na niedyskretne gry czasowe można spojrzeć dużo bardziej ogólnie, niż tylko poprzez pryzmat dyskretnych gier czasowych. Mianowicie punktem odniesienia wcale nie muszą być funkcje celności $P_i(t)$, a mogą to być odpowiednio zmodyfikowane funkcje celności $A_i(t)$, bez wiązania ich z funkcjami $P_i(t)$ wzorem (7). Po prostu, w pewnych modelach funkcje celności $P_i(t)$ mogą nie mieć żadnych sensownych interpretacji. Z drugiej strony, zadanie funkcji $A_i(t)$ już całkowicie determinuje funkcję wypłaty w niedyskretnej grze czasowej. Dlatego też, w niektórych konkretnych problemach, zasadnym jest rozpoczęcie ich modelowania bezpośrednio od odpowiedniego zdefiniowania funkcji $A_i(t)$.

5. Przykład gry czasowej klasy II. W niniejszym rozdziale opiszemy pewien szczególny przypadek gry czasowej klasy II przedstawionej w konwencji pojedynku dwóch graczy i rozwiązanej przez Trybułę w pracy [58], choć bez trudu można znaleźć dla niej bardziej realistyczną interpretację modelu „walki” handlowej lub marketingowej dwóch firm na rynku. Pokazuje ona, że nawet w prostym, wydałoby się, modelu takiej gry, poszukiwanie postaci strategii optymalnych prowadzi do bardzo skomplikowanych rachunków, a zasługą autora jest to, że potrafił wyprowadzić z nich zwarte explicite formuły strategii umożliwiające dowiedzenie ich optymalności.

5.1. *Opis gry.* Oznaczmy przez $\boldsymbol{\Gamma}$ grę czasową o następującej strukturze: W grze bierze udział dwóch graczy I i II, którą jest ich „pojedynek" toczący się według następujących reguł. W momencie $t = 0$, gracze stojący w odległości $d = 1$ od siebie rozpoczynają marsz ku sobie. Zakłada się przy tym, że gracz I posiada dwa „pistolety", jeden z "kulą" typu A (użycie jej - akcja A) i jeden z "kulą" typu B (użycie jej - akcja B), natomiast gracz II posiada tylko jeden pistolet z kulą typu A. Akcja A może być podjęta przez każdego z graczy w każdym momencie, natomiast akcja B może być podjęta przez gracza I dopiero w momencie spotkania obu graczy (czyli, gdy $d = 0$).

Podjęcie przez gracza akcji A może zakończyć się „sukcesem" (trafienie przeciwnika) z prawdopodobieństwem $P(t)$, gdy odległość między graczami wynosi $1 - t$, natomiast podjęcie akcji B przez gracza I kończy się sukcesem z prawdopodobieństwem p, przy czym zakładamy, że

$$0 \leq p < 1\ . \tag{11}$$

Dodatkowo zakładamy, że akcja A podejmowana przez gracza I jest typu „cichego" (gracz II nie zna momentu jej podjęcia), natomiast gracz I zawsze zna moment podjęcia akcji A przez gracza II (typ akcji „głośny"). Gra (pojedynek) się kończy w pierwszym momencie sukcesu przez jakiegoś z graczy.

Funkcja $P(t)$, $0 \leq t \leq 1$, będzie nazywana *funkcją sukcesu.* Parametr t będziemy w pracy interpretować jako czas, co pozwala widzieć rozważaną grę jako rozpoczynającą się w momencie $t = 0$ i kończącą się w momencie $t = 1$ (w przypadku braku sukcesu wcześniej przez któregokolwiek z graczy). Zakłada się, że $P(t)$ jest funkcją rosnącą i ciągłą w przedziale $[0,1]$, ma ciągłą drugą pochodną $P''(t)$ w $(0,1)$, oraz spełnia: $P(0) = 0$ i $P(1) = 1$.

Wypłatę dla gracza I definiuje w następujący sposób: otrzymuje on $+1$ gdy wygra on pojedynek (tylko on odniesie sukces), -1 gdy przegra on pojedynek (tylko gracz II odniesie sukces), oraz wartość 0 w pozostałych przypadkach (remis). Zakładamy, że gracz I dąży do zmaksymalizowania swojej wygranej, podczas gdy gracz II dąży do jej zminimalizowania. W ten sposób rozważana gra staje się grą o sumie zerowej.

5.2. *Postać normalna gry.* Jest zrozumiałe, że za zbiory *strategii czystych* S i T gracza I i II można przyjąć $S = T = [0,1]$, przy czym parę $(s,t) \in S \times T$ interpretujemy w ten sposób, że na początku gry gracze I i II planują podjąć swoje akcje A w momentach odpowiednio s i t (akcja B będzie zawsze podjęta przez gracza I w momencie 1, o ile gra nie zakończy się wcześniej). Ponieważ z założenia akcja A gracza II jest „głośna", strategię czystą s gracza I modyfikuje się milcząco w ten sposób, że w przypadku

$t < s$ gracz I zmienia swoją pierwotną decyzję (podjąć akcję A w momencie s) na decyzję $s = 1$, gdyż wtedy prawdopodobieństwo jego sukcesu $P(1) = 1$ jest największe.

Oznaczmy przez $K(s,t)$ oczekiwaną wygraną gracza I gdy gracze I i II stosują strategie czyste odpowiedni s i t. Funkcję $K(s,t)$, $0 \leq s,t \leq 1$, będziemy nazywać *funkcją wypłaty*. Zatem trójka (S,T,K) opisuje postać normalną rozważanej gry $\boldsymbol{\Gamma}$. Nietrudno wywnioskować następującą formułę dla funkcji wypłaty K:

$$K(s,t) = \begin{cases} P(s) - (1 - P(s))P(t) & \\ \quad +p(1 - P(s))(1 - P(t)) & \text{gdy } s < t < 1, \\ p(1 - P(t))^2 & \text{gdy } s = t, \\ 1 - 2P(t) & \text{gdy } t < s, \\ P(s) - (1 - p)(1 - P(s)) & \text{gdy } s < t = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Dla przykładu, uzasadnimy powyższą postać funkcji wypłaty w sytuacji $s < t < 1$. Wtedy może zajść jeden z dwu przypadków: (a) gracz I podejmując swą akcję A w momencie s odnosi sukces, tj. trafia przeciwnika, lub (b) nie odnosi sukcesu (nie trafia przeciwnika). Prawdopodobieństwo zajścia tych przypadków wynosi odpowiednio $P(s)$ i $1-P(s)$. Łatwo zauważyć, że w przypadku (a) wygrana gracza I wynosi $+1$. Natomiast w przypadku (b) mogą się zdarzyć dwa dalsze podprzypadki: (b1) gracz II podejmując swą akcję A w momencie t odnosi sukces (z prawdopodobieństwem $P(t)$) lub (b2) nie odnosi on sukcesu (prawdopodobieństwo tego wynosi $1 - P(t)$). Wtedy oczekiwana wygrana gracza I wynosi odpowiednio -1 lub p. Stąd oczekiwana wypłata w całej grze w sytuacji $s < t < 1$ wyniesie

$$P(s)(+1) + (1 - P(s))[P(t)(-1) + (1 - P(t))p],$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (12) w przypadku $s < t < 1$. W podobny sposób może być uzasadniona reszta przypadków wzoru (12).

Oczywistym jest, że zarówno gracz I jak i II mogą wybrać momenty s i t dla swych czystych strategii zgodnie z dowolnie wybranymi przez siebie rozkładami prawdopodobieństwa na przedziale $[0,1]$. Zatem pierwotną postać normalną (S,T,K) gry Γ należy rozszerzyć do trójki (X,Y,K), gdzie X i Y są zbiorami wszystkich rozkładów prawdopodobieństwa na przedziale $[0,1]$ opisującymi teraz zbiory *strategii mieszanych* odpowiednio gracza I i II, a funkcja wypłaty $K : X \times Y \Rightarrow R$ (jako oczekiwana wypłata) będzie postaci:

$$K(F,G) = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} K(s,t)dF(s)dG(t) \tag{13}$$

dla dowolnych strategii $F \in X$ i $G \in Y$ graczy.

5.3. *Konstrukcja strategii optymalnych.* W dalszej części pracy, dla uproszczenia, strategie czyste s i t będą interpretowane także jako jednopunktowe rozkłady prawdopodobieństwa. Szukając strategii optymalnych F i G dla graczy I i II, w grze $\boldsymbol{\Gamma}$ i wartości v tej gry, wystarczy zatem pokazać, że dla wszystkich $0 \le s, t \le 1$

$$K(F, t) \ge v \quad \text{i} \quad K(s, G) \le v\,. \tag{14}$$

Oznaczmy przez ξ_a mieszaną strategię gracza I, która nakazuje mu podjąć akcję A w pewnym losowym momencie s w przedziale $[a, 1]$, według pewnego ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości $f_1(s)$. Zatem

$$\int_a^1 f_1(s)ds = 1\,. \tag{15}$$

Podobnie, niech η_a^b oznacza mieszaną strategie gracza II, zgodnie z którą podejmuje on swoją akcję A w pewnym losowym momencie t w przedziale $[a, 1)$, według pewnego ciągłego rozkładu o gęstości $f_2(t)$, a z pozostałym prawdopodobieństwem β równym

$$\beta = 1 - \int_a^1 f_2(t)dt \tag{16}$$

podejmuje swą akcję A w momencie $t = b$.

Niech teraz η_a będzie „graniczną" idealizacją strategii η_a^b przy $b \to 1-$, co można interpretować w ten sposób, że stosując „strategię" η_a gracz II będzie podejmował z prawdopodobieństwem β swoją akcję A "bezpośrednio" przed momentem $t = 1$, w którym to gracz I zawsze podejmuje swoją akcję B. Przy tym będziemy stosować naturalną definicję, że dla $s \in [0, 1]$

$$K(s, \eta_a) = \lim_{b \to 1-} K(s, \eta_a^b) = \int_a^1 K(s, t) f_2(t)dt + \beta K(s, 1-)\ , \tag{17}$$

gdzie $K(s, 1-) = \lim_{\varepsilon \to 0+} K(s, 1 - \varepsilon)$. Ten teoretyczny zabieg uznania η_a także za strategię gracza II pozwoli nam wyraźnie uprościć nasze dalsze rozważania prowadzące w końcu do znalezienia optymalnej strategii gracza I i ε-optymalnej strategii gracza II.

Nasze rozważania będą opierać się na heurystycznym założeniu (mocno umotywowanym przez wyniki z literatury gier czasowych), że dla pewnych $0 < a < 1$ i funkcji gęstości $f_1(s)$ i $f_2(t)$ strategie ξ_a i η_a są strategiami optymalnymi. To z kolei wymusza (patrz Lemat 2.2.1 w [13]) dalszy wniosek, że są one *strategiami wyrównującymi* , tzn. spełniają następujące dwie równości:

$$K(\xi_a, t) \equiv v \text{ (const)} \equiv K(s, \eta_a) \qquad a \le s, t < 1, \tag{18}$$

gdzie v jest wartością gry $\boldsymbol{\Gamma}$.

Zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5.1. *Załóżmy, że dla pewnych stałych* $0 < a < 1$, $0 < \beta < 1$ *i* v, *oraz funkcji gęstości* $f_1(s)$ *i* $f_2(t)$ *na* $[a, 1)$, *strategie* ξ_a *i* η_a *są strategiami optymalnymi graczy I i II w grze* $\boldsymbol{\Gamma}$ *spełniającymi (15)–(18). Wtedy*

$$v = 3 + 2r - 2\sqrt{(1+r)(2+r)}\ , \tag{19}$$

$$f_1(s) = \frac{c_1 P'(s)}{[P^2(s) + 2rP(s) - r]^{3/2}}\ , \tag{20}$$

$$f_2(t) = \frac{c_2 P'(t)}{[P^2(t) + 2rP(t) - r]^{3/2}}\ , \tag{21}$$

$$\beta = \frac{1}{2 + r + \sqrt{(1+r)(2+r)}}\ , \tag{22}$$

gdzie r, a, c_1 *i* c_2 *są stałymi jednoznacznie wyznaczonymi przez równości*:

$$r = \frac{1-p}{1+p}\ , \tag{23}$$

$$P(a) = -(1+r) + \sqrt{(1+r)(2+r)}\ , \tag{24}$$

$$c_1 = (1+r)\left(\sqrt{(2+r)} - \sqrt{1+r}\right) \tag{25}$$

$$c_2 = \frac{(1+r)^{3/2}}{2 + r + \sqrt{(1+r)(2+r)}}\ . \tag{26}$$

Dowód. Wykorzystując (12), (13) i (18), dla $t \in [a, 1)$ otrzymujemy następującą tożsamość:

$$\begin{aligned} K(\xi_a, t) &= \int_a^1 K(s,t) f_1(s)ds \\ &= \int_a^t [P(s) - (1 - P(s))P(t) + p(1 - P(s))(1 - P(t))] f_1(s)ds \\ &\quad + \int_t^1 (1 - 2P(t)) f_1(s)ds \ \equiv v\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Zróżniczkowanie teraz obu stron ostatniej tożsamości względem zmiennej t prowadzi do następnych dwóch tożsamości dla $t \in [a, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\xi_a, t)}{\partial t} &= [P^2(t) + 2P(t) - 1 + p(1 - P(t))^2] f_1(t) \\ &- (1+p)P'(t) \int_a^t (1 - P(s)) f_1(s)ds - 2P'(t) \int_t^1 f_1(s)ds \equiv 0 \end{aligned} \tag{28}$$

i (po kolejnym zróżniczkowaniu)

$$
\begin{aligned}
(29)\quad \frac{\partial^2 K(\xi_a,t)}{\partial t^2} &= [P^2(t)+2P(t)-1+p(1-P(t))^2]f_1'(t)\\
&+2[P(t)+1-p(1-P(t))]P'(t)f_1(t)\\
&-(1+p)P''(t)\int_a^t(1-P(s))f_1(s)ds-2P''(t)\int_t^1 f_1(s)ds\\
&-(1+p)(1-P(t))P'(t)f_1(t)+2P'(t)f_1(t)\equiv 0\,.
\end{aligned}
$$

Teraz (28) i (29) prowadzą (po eliminacji całek) do równania różniczkowego

$$
\begin{aligned}
&[(1+p)P^2(t)+2(1-p)P(t)-(1-p)]f_1'(t)\\
&\qquad+2[(1+p)P(t)+1-p]P'(t)f_1(t)\\
&\qquad-\frac{P''(t)}{P'(t)}[(1+p)P^2(t)+2(1-p)P(t)-1+p]f_1'(t)=0
\end{aligned}
$$

którego, jak nietrudno sprawdzić, rozwiązaniem jest funkcja

$$
(30)\qquad f_1(t)=\frac{CP'(t)}{[P^2(t)+2rP(t)-r]^{3/2}}\ ,\qquad a\le t<1
$$

gdzie C jest pewną stałą, a r postaci (23).

Podobnie jak poprzednio, wykorzystując (12), (13) i (18), dla $s\in[a,1)$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(31)\qquad K(s,\eta_a) &= \int_a^1 K(s,t)f_2(s)ds+\beta K(s,1-)\\
&= \int_a^s[1-2P(t)]f_2(t)dt\\
&+\int_s^1[P(s)-(1-P(s))P(t)+p(1-P(s))(1-P(t))]f_2(t)dt\\
&+\beta[2P(s)-1]\equiv v
\end{aligned}
$$

co, po dwukrotnym zróżniczkowaniu (względem s), prowadzi do rozwiązania

$$
(32)\qquad f_2(s)=\frac{DP'(s)}{[P^2(s)+2rP(s)-r]^{3/2}}\ ,\qquad a\le s<1
$$

gdzie D jest pewną stałą, a r opisane przez (23).

Ponieważ f_1 i f_2 są gęstościami, więc z ich postaci (30) i (32) wnioskujemy (ze względu na monotoniczność funkcji $P(t)$), że

$$
(33)\qquad P^2(a)+2rP(a)-r>0,\quad C>0,\quad D>0\,.
$$

Wtedy dla $t\in[a,1)$ zachodzi nierówność $P^2(t)+2rP(t)-r>0$ i jak łatwo sprawdzić, na $[a,1)$ można rozważać i wyliczyć następujące dwie całki nieoznaczone:

$$(34)\quad \int \frac{P'(t)}{(P^2(t)+2rP(t)-r)^{3/2}} = -\frac{1}{(1+r)}\frac{P(t)/r+1}{[P^2(t)+2rP(t)-r]^{1/2}} + E,$$

$$(35)\quad \int \frac{P(t)P'(t)}{(P^2(t)+2rP(t)-r)^{3/2}} = \frac{1}{(1+r)}\frac{P(t)-1}{[P^2(t)+2rP(t)-r]^{1/2}} + E,$$

gdzie E jest stałą.

Wychodząc teraz od równości (27) i wykorzystując (23), (30), (34) i (35), dla $t \in [a,1)$ otrzymujemy:

$$(36)\quad \begin{aligned} K(\xi_a,t) = & \int_a^t [P(s)-(1-P(s))P(t) \\ & + \frac{1-r}{1+r}(1-P(s))(1-P(t))]f_1(s)ds \\ & + \int_t^1 (1-2P(t))f_1(s)ds\,. \\ = & \frac{2C}{r(1+r)}\left[-\frac{P(a)}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}} + (1+r)^{1/2}\right]P(t) \\ & + \frac{C}{r(1+r)}\left[\frac{r+(1-2r)P(a)}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}} - (1+r)^{1/2}\right] \equiv v\,. \end{aligned}$$

Jednakże ostatnia tożsamość pociąga równość

$$-\frac{P(a)}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}} + (1+r)^{1/2} = 0$$

co po rozwiązaniu daje równość (24), a wtedy (36) sprowadza się do równości

$$(37)\quad v = \frac{C}{r(1+r)}\left[-\frac{r+(1-2r)P(a)}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}} - (1+r)^{1/2}\right]\,.$$

Podobnie, wychodząc od równości (31) i wykorzystując (23), (32), (34) i (35), dla $s \in [a,1)$ otrzymujemy:

$$(38)\quad \begin{aligned} K(s,\eta_a) = & \int_a^s [1-2P(t)]f_2(t)dt \\ & + \int_s^1 [P(s)-(1-P(s))P(t) + \frac{1-r}{1+r}(1-P(s))(1-P(t))]f_2(t)dt \\ & + \beta[2P(s)-1] \\ = & 2\left(-\frac{D}{(1+r)^{3/2}} + \beta\right)P(s) \end{aligned}$$

$$+\frac{D}{(1+r)}\left[\frac{(1/r+2)P(a)-1}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}}-\frac{1-r}{r(1+r)^{1/2}}\right]-\beta\equiv v\,.$$

Ale tożsamość (38) natychmiast pociąga dwie następujące równości:

$$\beta=\frac{D}{(1+r)^{3/2}} \tag{39}$$

i

$$v=\frac{D}{(1+r)}\left[\frac{(1/r+2)P(a)-1}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}}-\frac{1-r}{r(1+r)^{1/2}}\right]-\beta\,. \tag{40}$$

Dalej, (15), (30) i (34) prowadzą do równości

$$\frac{C}{r(1+r)}\left[-\frac{P(a)+r}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}}-(1+r)^{1/2}\right]=1\,, \tag{41}$$

a konsekwencją równości (16), (32) i (34) jest

$$\frac{D}{r(1+r)}\left[-\frac{P(a)+r}{[P^2(a)+2rP(a)-r]^{1/2}}-(1+r)^{1/2}\right]=1-\beta\,. \tag{42}$$

Nietrudno teraz sprawdzić, że układ złożony z równości (24) (pokazano ją powyżej), (37), (39)–(42) jednoznacznie determinuje wartości niewiadomych C, D, β i v, przy czym β i v są postaci odpowiednio (22) i (19), a $C=c_1$ i $D=c_2$ odpowiednio postaci (25) i (26).

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać nierówności $0<a<1$ i $0<\beta<1$. Druga z nich wynika natychmiast z (22). Natomiast nierówność $0<a<1$ wynika z tego, że (24) jest równoważna równości

$$P(a)=\frac{1+r}{1+r+\sqrt{(1+r)(2+r)}}$$

a r spełnia nierówność $0\le r<1$, co jest bezpośrednią konsekwencją (11) i (23).

5.4. *Dowód optymalności.* Twierdzenie 5.1 udowodnione w poprzednim podrozdziale wyznaczyło jednoznacznie stałe a, c_1, c_2, β i v opisujące strategię ξ_a gracza I i „graniczną strategię” η_a gracza II, tj. która może być przybliżana strategiami tego gracza postaci η_a^b przy $b\to 1-$. Dodatkowo pokazano, że ξ_a i η_a spełniają równości (18).

Dla $\varepsilon>0$, niech $\delta(\varepsilon)$ oznacza jakąkolwiek liczbę opisaną przez warunek

$$\delta(\varepsilon)=\max\{a,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\} \tag{43}$$

gdzie $\delta_1(\varepsilon)$ i $\delta_2(\varepsilon)$ są określone przez równości: $P(\delta_1(\varepsilon))=1-\varepsilon/(2\beta)$ i $P(\delta_2(\varepsilon))=2-\sqrt{2}$. Zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 5.2. *Niech $\varepsilon>0$. W grze Γ strategia ξ_a jest strategią optymalną gracza I, a $\eta_a^{\delta(\varepsilon)}$ jest strategią ε-optymalną gracza II. Gra Γ posiada wartość v postaci (19).*

Dowód. Wystarczy pokazać zachodzenie następujących dwóch nierówności:

$$K(\xi_a, t) \geq v \quad \text{for} \quad t \in [0,1] \tag{44}$$

i

$$K(s, \eta_a^{\delta(\varepsilon)}) \leq v + \varepsilon \quad \text{for} \quad s \in [0,1]\,. \tag{45}$$

Ze względu na (18), nierówność (44) wystarczy pokazać tylko dla $t \in [0, a)$.

Niech więc $0 \leq t < a$. Wtedy z pomocą (12), (13) i (18) możemy wnioskować:

$$\begin{aligned} K(\xi_a, t) &= \int_a^1 K(s,t) f_1(s) ds = \int_a^t [1 - 2P(t)] f_1(s) ds \\ &> \int_a^t [1 - 2P(a)] f_1(s) ds = \int_a^1 K(s,a) f_1(s) ds = K(\xi_a, a) = v \end{aligned}$$

co kończy dowód (44).

Dla dowodu (45) rozważymy trzy przypadki, w których wykorzystamy łatwo wynikające z (12) i (43) nierówności:

$$K(s,t) < K(a,t) \quad \text{dla} \quad s < a < t < 1 \tag{46}$$

$$K(s, \delta(\varepsilon)) < K(s, 1-) + \varepsilon/\beta \quad \text{dla} \quad s \in [a, \delta(\varepsilon)) \tag{47}$$

$$K(s, \delta(\varepsilon)) < K(s, 1-) \quad \text{dla} \quad s \in [\delta(\varepsilon), 1]\,. \tag{48}$$

Przypadek 1: $a \leq s < \delta(\varepsilon)$.
Wtedy za pomocą (13), (47), (17) i (18) możemy wnioskować:

$$\begin{aligned} K(s, \eta_a^{\delta(\varepsilon)}) = \int_a^1 K(s,t) f_2(t) dt + \beta K(s, \delta(\varepsilon)) &< \int_a^1 K(s,t) f_2(t) dt \\ &+ \beta K(s, 1-) + \varepsilon = K(s, \eta_a) + \varepsilon \ = v + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Zatem (45) zachodzi dla $s \in [a, \delta(\varepsilon))$.

Przypadek 2: $0 \leq s < a$.
Wtedy wykorzystując (13), (46), (47) i wynik przyp. 1, możemy wnioskować:

$$\begin{aligned} K(s, \eta_a^{\delta(\varepsilon)}) = \int_a^1 K(s,t) f_2(t) dt + \beta K(s, \delta(\varepsilon)) &< \int_a^1 K(a,t) f_2(t) dt \\ &+ \beta K(a, \delta(\varepsilon)) = K(a, \eta_a^{\delta(\varepsilon)}) < v + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Przypadek 3: $\delta(\varepsilon) \leq s \leq 1$.

$$K(s, \eta_a^{\delta(\varepsilon)}) = \int_a^1 K(s,t) f_2(t) dt + \beta K(s, \delta(\varepsilon)) < \int_a^1 K(s,t) f_2(t) dt$$

$$+\beta K(s, 1-) = K(s, \eta_a) = v < v + \varepsilon.$$

Udowodniliśmy więc, że nierówność (45) zachodzi, co kończy dowód twierdzenia 5.2.

Literatura

[1] Bellman R., Girshick M. A., *An extension of results on duels with two opponents, one bullet each, silent guns, equal accuracy*, The RAND Corporation, D-403 1949.

[2] Blackwell D., *The noisy duel, one bullet each, arbitrary accuracy*, The RAND Corporation, D-442 (1949).

[3] Blackwell D., *The silent duel, one bullet each, arbitrary accuracy*, The RAND Corporation, D-302 (1949).

[4] Blackwell D., Girshick M. A., *A loud duel with equal accuracy where each duelist has only a probability of possessing a bullet*, The RAND Corporation, RM-219 (1949).

[5] Blackwell D., Girshick M. A., *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley, New York (1954).

[6] Blackwell D., Shiffman M. , *A bomber-fighter duel*, The RAND Corporation, RM-193 (1949).

[7] Cegielski A., *Game of timing with uncertain number of shots*, Mathematica Japonica **31** (1986), 503–532.

[8] Cegielski A., *Tactical problems involving uncertain actions*,Journal of Optimization Theory and Applications **49** (1986), 81–105.

[9] Fox M., Kimeldorf G. S.,*Noisy duels*,SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 353–361.

[10] Gillman L., *Operations analysis and the theory of games: an advertising example*, J. Amer. Stat. Assoc. **45**(1950), 541–546.

[11] Glicksberg, I., *Noisy duel, one bullet each, with simultaneous fire and unequal worths*, The RAND Corporation, RM-474 (1950).

[12] Karlin S., *Reduction of certain classes of games to integral equations, Contributions to the theory of games*, II, **28** Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton (1953), 125–158.

[13] Karlin S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Tom II, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts (1959).

[14] Kimeldorf G. S., Lang J. P., *Asymptotic properties of non-discrete duels*, J. Appl. Prob. **14**(1977), 153–161.

[15] Kimeldorf G. S., Lang J. P., *Asymptotic properties of discrete duels*, J. Appl. Prob. **15**(1978), 374–396.

[16] Kurisu T., *Two noisy versus one silent duel with equal accuracy functions*, Journal of Optimization Theory and Applications **39**(1983), 215–235.

[17] Kurisu T.,*On a duel with time lag and arbitrary accuracy functions*, International Journal of Game Theory **19**(1991), 43–56.

[18] Lang J. P., Kimeldorf G. S., *Duels with continuous firing*, Management Science **22** (1975), 470–476.

[19] Lang J. P., Kimeldorf G. S., *Silent duels with non-discrete firing*, SIAM Journal on Applied Mathematics **31** (1976), 99–110.

[20] Orłowski K., Radzik T., *Discrete silent duels with complete counteraction*, Optimization **16**(1985), 419–429.

[21] Positielskaya L. N., *Non-discrete noisy duels*, Engineering Cybernetics **2** (1984), 40–44.

[22] Radzik T., Orłowski K., *A mixed game of timing — investigation of strategies*, Zastosowania Matematyki **17** (1982), 409–430.

[23] Radzik T., Orłowski K., *A mixed game of timing — problem of optimality*, Zastosowania Matematyki **17**(1982), 431–453.

[24] Radzik T., Orłowski K., *Non-discrete silent duels with complete counteraction*, Optimization **16** (1985), 257–263.

[25] Radzik T., *Games of timing related to distribution of resources*, Journal of Optimization Theory and Applications **58** (1988), 443–471.

[26] Radzik T., *Games of timing with resources of mixed type*, Journal of Optimization Theory and Applications **58**(1988), 473–500.

[27] Radzik T., *Silent mixed duels*, Optimization **20** (1989), 533–556.

[28] Radzik T., *General noisy duels*, Mathematica Japonica **36** (1991), 827–857.

[29] Radzik T., *Results and problems in games of timing*, In: Statistics, Probability and Game Theory, Papers in Honor of David Blackwell (T. Ferguson, L.S. Shapley and J.B. MacQueen eds) (1996), 269–292.

[30] Radzik T., Goldman A. J., *On problems with information in some games*, Advances in Dynamic Games and Applications, Birkhauser (2000), 3–16.

[31] Restrepo R., *Tactical problems involving several actions*, Annals of Mathematics Studies **39** (1957), 313–335.

[32] Sakaguchi M., *Single-shot noisy duel with disparate information to the duelists*, Mathematica Japonica **29**(1984), 815–833.

[33] Shiffman M., *Games of timing, Contributions to the Theory of Games*, II., **28** Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, (1957), 97–123.

[34] Smith G., *A duel with silent-noisy gun versus noisy gun*, Colloquium Mathematicum **17** (1967), 131–146.

[35] Styszyński A., *An n-silent-vs.-noisy duel with arbitrary accuracy functions*, Zastosowania Matematyki **14** (1974), 205–225.

[36] Sudżute D., *General properties of Nash equilibria in duels*, Litovskiy Matematiceskiy Sbornik **23** (1983), 58–72.

[37] Teraoka Y., *A two person game of timing with random termination*, Journal of Optimization Theory and Applications **40** (1983), 379–396.

[38] Teraoka Y., *Silent-noisy markmanship contest with random termination*, Journal of Optimization Theory and Application**49** (1986), 477–487.

[39] Trybuła S., *Silent duel withretreat after the shots*, Podstawy Sterowania **18**(3-4) (1988), 231–239.

[40] Trybuła S., *The duels under random distance*, Podstawy Sterowania **18**(3-4) (1988), 241–250.

[41] Trybuła S., *A silent n versus 1 bullet duel with retreat after the shots*, Optimization **21**(4) (1990), 609–627.

[42] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving. I*, Applicationes Mathematicae **20**, 4(1990), 491–496.

[43] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving. II*, Applicationes Mathematicae **20**, 4(1990), 497–516.

[44] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving. III*, Applicationes Mathematicae **20**, 4(1990), 517–530.

[45] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving. IV*, Applicationes Mathematicae **21**, 1(1991), 43–61.

[46] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving. V*, Applicationes Mathematicae **21**, 1(1991), 63–81.

[47] Trybuła S., *A noisy duel under arbitrary moving VI*, Applicationes Mathematicae **21**, 1(1991), 83–98.
[48] Trybuła S., *A silent duel under arbitrary moving*, Applicationes Mathematicae **21**, 1(1991), 99–108.
[49] Trybuła S., *Solution of a silent duel under general assumption*, Optimization **22**(3) (1991), 449–459.
[50] Trybuła S., *A silent duel under arbitrarness of movements*, Control and Cybernetics, **20** (1) (1991), 69–103,
[51] Trybuła S., *A noisy duel with two kinds of weapon*, Control and Cybernetics **22**, Parts I–III (1993), 69–103,
[52] Trybuła S., *Solution of a silent duel with arbitrary motion and arbitrary accuracy functions*, Optimization **27**(3) (1993), 151–172.
[53] Trybuła S., *A single bullet silent duel under arbitrary moving*, Systems Science **19**(1) (1993), 21–26.
[54] Trybuła S., *'A noisy duel with two kinds of weapon*, Control and Cybernetics **24**, Parts IV–V (1995), 77–102,
[55] Trybuła S., *A silent versus partially noisy duel under arbitrary moving ander general assumptions on the payoff function*, Control and Cybernetics, **26** (4) (1997), 625–634,
[56] Trybuła S., *A duel under arbitrary moving of the duelists*, Control and Cybernetics, **26** (4) (1997), 635–640.
[57] Trybuła S., *A silent duel with two kinds of weapon*, Control and Cybernetics **28** (1999), 115–120.
[58] Trybuła S., *Silent-noisy duel with two kinds of weapon*, Control and Cybernetics **29** (2000), 905–915.
[59] Trybuła S., *A silent duel in which losses of player I are not taken into account*, Applicationes Mathematicae **28** (2001).
[60] Trybuła S., Radzik T., *Gry czasowe*, Oficyna Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2003).
[61] Trybuła S., Radzik T., *Gry wyboru momentów działania*, Oficyna Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2010).
[62] Yanovskaya Y. B., *Duel-type games with continuous firing*, Engineering Cybernetics **1** (1969), 15–18.
[63] Żadan W. G., *Noisy duels with arbitrary accuracy functions*, Issledovanye Operaciy **5** (1976), 156–177.

Tadeusz Radzik
Instytut Matematyki i Informatyki,
Politechnika Wrocławska,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: Tadeusz.Radzik@pwr.wroc.pl.

Games of Timing

Abstract. This paper is written in honour of prof. Stanisław Trybuła. It introduces the readers into the theory of so-called games of timing which were one of the main topic of his interest within the last of twenty years. Games of timing are one of essential problems studied in game theory. They describe some special type of conflict situations between two antagonistic sides, where each of them must decide in what moments of a time interval some its necessary decisions should be taken to be „maximally efficient". The behavior efficiency of each side is determined by the following two rules: (1) the moments of taking decisions should be as late as possible, and (2) the mostly efficient strategy for each side is to take its decision not later than the opponent side will do. Games of timing present a new topic within zero-sum games and can be recognized as having the wide scope of possible applications, particularly in the description and explaining of some conflict situations in economics. Within the last of fifty years many new general problems in games of timing have been formulated and many important and interesting results have been achieved. Just prof. Trybuła was one of the authors who studied and found solutions for many different models of games of timing (in 23 published papers), describing optimal strategy behavior for both sides taking part in the game.

The first part of the paper contains a general definition of games of timing and aquaints the readers with their theoretic structure. Next, the history of achieved results for different general models of such games in the literature is widely discussed. In particular, the following types of games are considered here: games of timing of class I and II, noisy and silent discrete duels, mixed discrete duels, and silent non-discrete duels. In the third part of the paper, a theory unifying discrete and non-discrete games of timing is presented, which allows the readers to better understand their structure. The paper ends with considerations of some special case of a game of timing of class II studied by prof. Trybuła. It is presented in the form of a zero-sum two-person game which can be interpreted as a model of a trade battle or a battle of two firms on the market. Prof. Trybuła shows there that even in such seemingly simple case of game of timing, searching for optimal strategies for the players leads to very complex considerations which finally allow to find an explicite formulae for their optimal behavior.

Keywords: Game of timing, duel, silent, noisy, mixed, discrete, non-discrete, optimal strategy, games of class I and II, history of games of timing.

(*wpłynęło 14 maja 2010 r.*)