DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA TOM 11/52 2010

Ryszard Magiera, Maciej Wilczyński (Wrocław)

Wpływ Profesora Stanisława Trybuły na rozwój teorii estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych

Streszczenie. W artykule omówiono wkład Stanisława Trybuły w badania dotyczące sekwencyjnej estymacji dla procesów stochastycznych. Dwa jego artykuły, opublikowane w Dissertationes Mathematicae (1968, 1985), miały istotny wpływ na przyszły rozwój tej dziedziny i zainteresowały wielu statystyków matematyków. W artykule pokrótce omawiamy rezultaty uzyskane przez autorów zainspirowanych tymi dwoma fundamentalnymi pracami Stanisława Trybuły.
Słowa kluczowe: estymacja sekwencyjna, efektywny plan sekwencyjny, proces stochastyczny, minimaksowy plan sekwencyjny, wykładnicza rodzina procesów.

1. Geneza. Badania dotyczące wyznaczania optymalnych planów (procedur) sekwencyjnych dla ogólnych klas procesów mają swą genezę właściwie w pracach Dvoretzky'ego, Kiefera i Wolfowitza [6] i DeGroota [4]. DeGroot rozpatrywał problem wyznaczenia planów sekwencyjnych, efektywnych (w klasie planów nieobciążonych) w sensie nierówności Wolfowitza [59], w przypadku estymacji prawdopodobieństwa sukcesu w doświadczeniach Bernoulliego. Wydaje się, że praca DeGroota zainspirowała Prof. Stanisław Trybułę do badań nad wyznaczeniem efektywnych planów sekwencyjnych dla procesów stochastycznych o przyrostach niezależnych z czasem ciągłym.

Dwie prace Prof. Stanisława Trybuły opublikowane w Dissertationes Mathematicae w latach 1968 i 1985, oznaczone poniżej przez [A] i [B], miały znaczący wpływ na rozwój teorii estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych. W artykule pokrótce omawiamy rezultaty uzyskane przez autorów zainspirowanych tymi dwoma fundamentalnymi pracami Trybuły.

2. Efektywna estymacja sekwencyjna. W 1968 roku została opublikowana praca

[**A**] S. Trybuła [52]. Sequential estimation in processses with independent increments. *Dissertationes Mathematicae*, 60:1–46, która stała się inspiracją do dalszych badań w dziedzinie estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych.

Prof. Trybuła rozpatrywał w pracy [A] problem sekwencyjnej estymacji nieznanego parametru, oddzielnie dla procesu Poissona, Wienera z dryfem i ujemno dwumianowego, tzn. dla podstawowych i ważnych reprezentantów procesów o przyrostach niezależnych. Podał dla nich charakteryzację efektywnych planów sekwencyjnej estymacji nieznanych parametrów oraz charakteryzację funkcji efektywnie estymowalnych. Opisał również zupełne plany estymacji sekwencyjnej.

Pracę [A] cytują wcześnie Zaidman, Linnik i Sudakov [60] rozpatrując plany sekwencyjne pierwszego osiągnięcia pewnego typu brzegów dla procesów dwumianowego, wielomianowego, Poissona, niejednorodnego Poissona i Wienera z dryfem, ale problem dla ogólnych klas procesów nie został jeszcze podjęty.

Linnik i Romanowski na 6. Sympozjum w Berkeley (*Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1970) wysoko ocenili tę pracę. W swym artykule Linnik i Romanovsky [21] napisali o pracy [A] Prof. Trybuły: „*In Section 7 of his interesting work he makes some general remarks on efficient plans of sequential estimation for homogeneous processes with independent increments.*" W końcowej części pracy stwierdzają: „*Some particular cases of the processes with independent increments were considered by Trybula* [...]. *To study them systematically as we did for the discrete time case a generalization of Kagan's theorem ... for the continuous time case is needed. It has not yet been obtained.*"

Po roku 1972 badania w zakresie estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych podjęli uczniowie Prof. Trybuły, a także inni statystycy. Efektem tych badań było wiele rezultatów zainspirowanych tematyką przekazaną przez Profesora. W tym artykule skupiono się nad krótkim, możliwie chronologicznym, przedstawieniem informacji o niektórych z tych wyników.

W prowadzonych badaniach nad wyznaczaniem optymalnych procedur estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych wykorzystywano kryterium efektywności, opierające się na nierówności typu Craméra-Rao-Wolfowitza oraz na kryterium minimaksowości dla procedur sekwencyjnych.

Najpierw wyniki Prof. Trybuły [A] zostały uogólnione na przypadek wykładniczych rodzin procesów o przyrostach niezależnych (Magiera [22] oraz Franz i Winkler [57]). Ponadto, rezultaty DeGroota zostały uzupełnione o nowy, nieznany dotychczas plan sekwencyjnej estymacji prawdopodobieństwa sukcesu (Magiera i Trybuła [36]).

Do systematycznych badań w zakresie poszukiwań optymalnych planów estymacji sekwencyjnej nieznanych parametrów procesów stochastycznych z czasem ciągłym potrzebny był odpowiedni rezultat dotyczący absolutnej ciągłości miar generowanych przez parę złożoną z markowskiej chwili zatrzymania i pewien funkcjonał od procesu (funkcję decyzyjną) w chwili zatrzymania. Rezultatem, który okazał się przydatny w pierwszym etapie badań dotyczących poszukiwań optymalnych planów sekwencyjnych dla wykładniczej klasy procesów, był wykorzystany po raz pierwszy w tym zakresie w pracy Magiery [22] rezultat Sudakowa [51] o absulutnej ciągłości miar generowanych przez chwilę zatrzymania i odpowiadający jej stan procesu, będący statystyką dostateczną.

W pracy Magiery [22], wykorzystując lemat Sudakowa, podano nierówność typu Craméra-Rao w przypadku sekwencyjnym dla klasy procesów stochastycznych spełniających pewne warunki regularności oraz podano pewną charakteryzację efektywnych planów sekwencyjnych i funkcji efektywnie estymowalnych dla wykładniczej rodziny procesów o przyrostach niezależnych. W pracy Küchlera i Sørensena [18] stwierdzono w kontekście wnioskowań statystycznych: „*A detailed study of exponential families of continuous time Markov processes, in particular of processes with independent increments, was essentially initiated by Magiera [23] and Franz & Magiera [8] dots*". Dwie prace Magiery [22, 23], w których wyznaczono efektywne i minimaksowe procedury, tworzą podrozdział 12, §2.3, w monografii Basawy i Prakasy Rao [2].

Lemat Sudakowa był później modyfikowany (Różański [43], Döhler [5]), w kontekście jego wykorzystania w analizie sekwencyjnej dla różnych klas procesów stochastycznych i w swej ogólnej postaci, zwanej podstawową tożsamością analizy sekwencyjnej, został podany przez Küchlera i Sørensena [19, 20].

Podstawowa tożsamość analizy sekwencyjnej, która w swej pierwotnej wersji znana jest jako lemat Sudakowa, oraz zbadanie analitycznych własności wykładniczych rodzin procesów, otworzyły drogę do dalszych badań w dziedzinie analizy sekwencyjnej dla procesów stochastycznych, tj. teorii, która intensywniej zaczęła się rozwijać po 1972 r.

Początkowo pojęcie wykładniczych rodzin procesów odnosiło się do procesów o przyrostach niezależnych. Problemy wnioskowań statystycznych (estymacji i testowania hipotez) dla tego typu rodzin procesów były rozważane również przez wielu innych autorów, m.in. w pracach: Winkler i Franz [57], Winkler, Franz i Küchler [58], Winkler [56], Sørensen [48], Stefanov [49], Jensen [12].

Następnie uzyskiwano szereg rezultatów dotyczących estymacji sekwencyjnej dla innych procesów: pewnej klasy procesów typu dyfuzyjnego (Novikov [41], Musiela [39]); pewnego ciągłego gaussowskiego procesu Markowa (Musiela [40]); łańcuchów Markowa (Bai [1], Trybuła [53]); procesu urodzin i śmierci (Różański [43], Franz [7]); procesu Ornsteina-Uhlenbecka (Różański [43], Magiera [24]); procesu Markowa z migracją (Magiera [25]); procesu wielomianowego i procesu gamma (Wilczyński [55]).

Rozwiązano również problem efektywnej sekwencyjnej estymacji parametru wariancji pewnego stacjonarnego procesu gaussowskiego (Ornstein-Uhlenbeck-*velocity process*) (Magiera [24]). Efektywnymi planami sekwencyjnymi okazały się tzw. plany stałej energii i plany ukośne. Praca Magiery [24] zainspirowała również do badań własności funkcjonałów od procesu Ornsteina-Uhlenbecka (Partzsch [42]). Rozwiązanie problemu dla rozpatrywanego procesu Ornsteina-Uhlenbecka doprowadziło później do postawienia zadania estymacji sekwencyjnej w ogólnym modelu wykładniczym dla procesów, który obejmował również procesy startujące z losowego stanu lub w losowej chwili. W pracy Magiery i Stefanova [35] podano rozwiązanie problemu efektywnej estymacji sekwencyjnej dla tzw. $(n+1, n)$-skrzywionej wykładniczej rodziny procesów, obejmującej również procesy z losowym punktem startowym. Problemy estymacji sekwencyjnej były następnie rozpatrywane dla ogólniejszych modeli $(n+k, n)$-skrzywionych wykładniczych rodzin procesów, np. Küchler i Sørensen [19, 20], Stefanov [50].

W Polsce główny ośrodek badań dotyczący podejścia sekwencyjnego w statystyce matematycznej tworzył zespół kierowany przez Prof. Trybułę w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej. Prace, związane z tą tematyką, powstawały też w ośrodkach PAN. Ich autorami byli wspomniany wcześniej Marek Musiela a także Ryszard Zieliński. Drugi z nich rozwiązał zagadnienie konstrukcji reguł zatrzymania w problemie estymacji o stałej precyzji i znalazł sekwencyjny estymator liczby klas w rozkładzie wielomianowym (Zieliński [62, 3]).

Podejście sekwencyjne do estymacji parametrów procesów stochastycznych, zapoczątkowane w Polsce przez Prof. Trybułę, cieszyło się dużym zainteresowaniem statystyków już w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Doprowadziło to do zorganizowania przez Centrum Banacha semestru *Sequential Methods in Statistics*. W tym sympozjum, trwającym od 7 września do 11 grudnia 1981 roku, uczestniczyło 123 matematyków z szesnastu krajów, w tym kilkudziesięciu statystyków o uznanej renomie. Wygłoszono wiele interesujących referatów, przy czym niektóre z nich bezpośrednio dotyczyły problematyki zapoczątkowanej przez Prof. S. Trybułę. Większość z tych referatów została opublikowana w przygotowanym pod redakcją Ryszarda Zielińskiego tomie *Sequential Methods in Statistics* z serii *Banach Center Publications* ([61]).

3. Minimaksowa estymacja sekwencyjna. W 1985 roku opublikowana została praca

[**B**] S. Trybuła [54]. Some investigations in minimax estimation theory. *Dissertationes Mathematicae*, 240:1–42,

w której Prof. Trybuła rozwiązał wiele problemów sekwencyjnej estymacji parametrów procesów stochastycznych dla pewnych funkcji straty, uwzględniających oprócz błędu estymacji także i koszt obserwacji procesu. O mnogości zagadnień rozważanych w tej pracy mogą świadczyć tytuły kilku jej rozdziałów: *7. Sequential minimax estimation for stochastic processes in the case where there exists a sufficient statistic for the parameter. 8. Sequential estimation for the multinomial process, 9. Exponential family of processes. 10. Sequential estimation for a multivariate process, 11. Sequential estimation for the Poisson process, 12. Sequential minimax estimation in the case where the set of a priori distribution of the parameter is restricted.*

Ta rozprawa stała się inspiracją do dalszych badań w zakresie wyznaczania minimaksowych procedur estymacji sekwencyjnej w różnych modelach stochastycznych. Poniżej omówiono niektóre z rezultatów tych badań.

Problem wyznaczenia minimaksowych procedur związany jest z podejściem bayesowskim w estymacji, w którym podstawową rolę odgrywają rodziny rozkładów prawdopodobieństwa a priori. W pracy Magiery [29] została podana charakteryzacja sprzężonych rodzin a priori w sekwencyjnym modelu estymacji dla ogólnych wykładniczych rodzin procesów. Sprzężone rodziny rozkładów a priori w wykładniczych sekwencyjnych modelach estymacji były również badane w pracach Magiery i Wilczyńskiego [37, 38]. Wyniki uzyskane w pracy Magiery i Wilczyńskiego [38] umożliwiają konstruowanie dopuszczalnych i minimaksowych estymatorów sekwencyjnych parametrów procesów stochastycznych, które po losowej zamianie czasu nie dają się sprowadzić do procesów generowanych przez proces Levy'ego. Znaczenie badań dotyczących charakteryzacji rozkładów a priori w wykładniczych rodzinach procesów zostało podkreślone w monografii Küchlera i Sørensena [20], gdzie cytowany jest rezultat z pracy Magiery i Wilczyńskiego [37]. W monografii tej cytowane są również inne prace autorów związanych z tematyką estymacji sekwencyjnej zainspirowaną przez Prof. Trybułę (w tym m.in. prace Franza, Magiery, Różańskiego, Stefanowa, Trybuły). Dopuszczalność estymatorów sekwencyjnych badana była przez Magierę [26, 27, 28], Franza i Magierę [9].

Problem wyznaczenia optymalnych procedur sekwencyjnych w złożonych modelach stochastycznych, w tym dla procesów odnowy Markowa i procesów Markowa z addytywną komponentą, był rozpatrywany w pracach: Franz i Magiera [10], Magiera [32, 33], Franz i Magiera [11]. Wyznaczono, między innymi (Magiera [32]), klasę optymalnych procedur estymacji sekwencyjnej proporcji intensywności przejścia włożonego łańcucha Markowa i parametru wartości oczekiwanej składowej addytywnej rozważanego procesu Markowa, gdy oprócz błędu estymacji uwzględnia się koszt będący funkcją składowej addytywnej procesu (np. koszt zależny od liczby zgłoszeń w systemie kolejek czy też od liczby awarii do (losowej) chwili zatrzymania).

Rozpatrywano również problem minimaksowej estymacji sekwencyjnej parametrów pól losowych Różański [44, 45, 46, 47].

Wyznaczono bayesowskie i minimaksowe procedury estymacji sekwencyjnej w pewnych modelach statystycznych, w których obserwacje dostępne są jedynie w chwilach losowych (Magiera [30, 31], Jokiel-Rokita i Magiera [15,17]).

W jednym z podrozdziałów pracy [B] Prof. Trybuły zawarte są rezultaty dotyczące Γ-minimaksowych procedur dla czterech reprezentantów procesów o przyrostach niezależnych. Pewna klasa Γ-minimaksowych procedur sekwencyjnych dla podrodziny procesów Markowa z addytywną komponentą została wyznaczona w pracy Magiery [34]. Przyjęte klasy Γ rozkładów a priori określone są poprzez warunki nałożone na momenty tych rozkładów. Problem Γ-minimaksowej estymacji parametru rozkładu wielomianowego przy ustalonym i losowym rozmiarze próby był rozpatrywany przez Jokiel-Rokitę i Magierę [13].

Rozwiązano również dla niektórych modeli statystycznych problem wyznaczenia asymptotycznie optymalnych i asymptotycznie punktowo optymalnych sekwencyjnych procedur bayesowskich (Jokiel-Rokita [13, 14]).

Literatura

[1] D. S. Bai, *Efficient estimation of transition probabilities in a Markov chain*, Ann. Statist., 3:1305–1317, 1975.

[2] I.V. Basawa and B.L.S. Prakasa Rao, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Academic Press, London, New York, 1980.

[3] C.G.E. Boender and Ryszard Zieliński, *A sequential bayesian approach to estimating the dimension of a multinomial distribution.* In R. Zieliński, editor, Sequential Methods in Statistics, pages 37–42, Warsaw, 1985. Banach Center Publ., Vol. 16. PWN-Polish Scientific Publishers.

[4] M.H. DeGroot, *Unbiased sequential estimation for binomial populations*, Ann. Math. Statist., 30:80–101, 1959.

[5] R. Döhler, *Dominierberkeit und Suffizienz in der Sequentialanalyse*, Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statist., 12:101–134, 1981.

[6] A. Dvoretzky, J. Kiefer, and J. Wolfowitz, *Sequential decision problems for processes with continuous time parameter. Problems of estimation*, Ann. Math. Statist., 24:403–415, 1953.

[7] J. Franz, *Sequential estimation and asymptotic properties in birth-and-death processes*, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, 13(2):231–244, 1982.

[8] J. Franz and R. Magiera, *On sequential plans for the exponential class of processes*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 16:153–165, 1978.

[9] J. Franz and R. Magiera, *Admissible estimators in sequential plans for exponential-type processes*, Scand. J. Statist., 17:275–285, 1990.

[10] J. Franz and R. Magiera, *Sequential estimation for a family of counting processes in the nuisance parameter case*, Statistical Papers, 39:147–162, 1998.

[11] J. Franz and R. Magiera, *Parameter estimation for switched counting processes*, Statistics, 35:371–393, 2001.

[12] J.L. Jensen, *On asymptotic expansions in non-ergodic models*, Scand. J. Statist., 14:305–318, 1987.

[13] A. Jokiel-Rokita, *Asymptotically pointwise optimal and asymptotically optimal stopping times in the Bayesian inference*, Statistical Papers, 49(2):165–175, 2008.

[14] A. Jokiel-Rokita, *Bayes sequential estimation for a subclass of exponential family of distributions under LINEX loss function*, Metrika, http://dx.doi.org/DOI 10.1007/s00184-010-0298-4, 2010.

[15] A. Jokiel-Rokita and R. Magiera, *Estimation with delayed observations for the multinomial distribution*, Statistics, 32:353–367, 1999.

[16] A. Jokiel-Rokita and R. Magiera, *Gamma-minimax estimation with delayed observations from the multinomial distribution*, Statistics, 38:195–206, 2004.

[17] A. Jokiel-Rokita and R. Magiera, *Estimation procedures with delayed observations*, Journal of Statistical Planning and Inference, 140:992–1002, 2010.

[18] U. Küchler and M. Sørensen, *Exponential families of stochastic processes: a unifying semimartingale approach*, International Statistical Review, 57(2):123–144, 1989.

[19] U. Küchler and M. Sørensen, *Exponential families of stochastic processes and Lévy processes*, Statist. Plann. Inference, 39:211–237, 1994.

[20] U. Küchler and M. Sørensen, *Exponential Families of Stochastic Processes*, Spinger Series in Statistics, Springer, New York, 1997.

[21] Yu.V. Linnik and I.V. Romanovsky, *Some new results in sequential estimation theory*, In: Proccedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Volume I. Theory of Statistics, pages 85–96. University of California Press, 1972.

[22] R. Magiera, *On the inequality of Cramér-Rao type in sequential estimation theory*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 14:227–235, 1974.

[23] R. Magiera, *On sequential minimax estimation for the exponential class of processes*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 15:445–454, 1977.

[24] R. Magiera, *Sequential estimation for the spectral density parameter of a stationary Gaussian process*, Probab. Math. Statist., 4:33–45, 1984.

[25] R. Magiera, *Sequential estimation of the transition intensities in Markov processes with migration*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 18:241–250, 1984.

[26] R. Magiera, *Admissible sequential polynomial estimators for stochastic processes*, Sequential Analysis, 6(3):207–218, 1987.

[27] R. Magiera, *Admissibility of polynomial estimators in sequential estimation for exponential-type processes*, Sankhy-a, Ser. A, 52:178–191, 1990.

[28] R. Magiera, *Admissible sequential estimators of ratios between two linear combinations of parameters of exponential-type processes*, Statistics and Decisions, 9:107–118, 1991.

[29] R. Magiera, *Conjugate priors for exponential-type processes with random initial conditions,* Applicationes Mathematicae (Warsaw), 22(3):321–330, 1994.

[30] R. Magiera, *On a class of sequential estimation problems for one-parameter exponential families*, Sankhyā, 58, Series A, Pt.1:160–170, 1996.

[31] R. Magiera, *On minimax sequential procedures for exponential families of stochastic processes*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 25(1):1–18, 1998.

[32] R. Magiera, *Optimal Sequential Estimation for Markov-Additive Processes*, In: W. Kahle, E. von Collani, J. Franz, and U. Jensen, editors, Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety, chapter 12, pages 167–181. Birkhäuser Verlag, Boston, 1998.

[33] R. Magiera, *Minimax sequential procedures for Markov-additive processes*, Stochastic Models, 15(5):671–888, 1999.

[34] R. Magiera, *Γ-minimax sequential estimation for markov-additive processes*, Applicationes Mathematicae (Warsaw), 28(4):467–485, 2001.

[35] R. Magiera and V. T. Stefanov, *Sequential estimation in exponential-type processes under random initial conditions*, Sequential Analysis, 8(2):147–167, 1989.

[36] R. Magiera and S. Trybuła, *Plany ukośne dla procesu dwumianowego*, Mat. Stos., 6:41–47, 1976.

[37] R. Magiera and M. Wilczyński, *Conjugate priors for exponential-type processes*, Statist. Probab. Lett., 12:379–384, 1991.

[38] R. Magiera and M. Wilczyński, *Natural and modified conjugate priors in exponential families of stochastic processes*, Probability and Mathematical Statistics, 21(2):303–319, 2001.

[39] M. Musiela, *Sequential estimation of parameters of a stochastic differential equation*, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, 8(4):483–498, 1977.

[40] M. Musiela, *On sequential estimation of parameters of continuous Gaussian Markov processes*, Probability and Mathematical Statistics, 2(1):37–53, 1981.

[41] A.A. Novikov, *Sequential estimation of the parameters of diffusion-type processes*, Math. Notes, 12:812–818, 1972.

[42] L. Partzsch, *On calculating the Laplace transform of a special quadratic functional of the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*, In: R. Zieliński, editor, Sequential Methods in Statistics, pages 437–441, Warsaw, 1985. Banach Center Publ., Vol. 16. PWN-Polish Scientific Publishers.

[43] R. Różański, *A modification of Sudakov's lemma and efficient sequential plans for the Ornstein-Uhlenbeck process*, Appl. Math. (Warsaw), 17(1):73–86, 1980.

[44] R. Różański, *Sequential estimation in random fields*, Probability and Mathematical Statistics, 9(1):77–93, 1988.

[45] R. Różański, *Minimax sequential estimation of parameters of random fields*, Appl. Math. (Warsaw), 20(4):565–572, 1990.

[46] R. Różański, *Minimax sequential estimation based on random fields*, Probability and Mathematical Statistics, 12(1):35–42, 1991.

[47] R. Różański, *Random stopping sets in sequential analysis of random measures and fields*, Journal of Statistical Planning and Inference, 30:401–412, 1992.

[48] M. Sørensen, *On sequential maximum likelihood estimation for exponential families of stochastic processes*, Internat. Statist. Rev., 54:191–210, 1986.

[49] V.T. Stefanov, *Efficient sequential estimation in exponential-type processes*, Ann. Statist., 14:1606–1611, 1986.

[50] V.T. Stefanov, *Explicit limit results for minimal sufficient statistics and maximum likelihood estimators in some Markov processes: exponential families approach*, Ann. Statist., 23(4):1073–1101, 1995.

[51] V.N. Sudakov, *On measures defined by Markovian moments*, In: Investigations on the Theory of Random Processes, V. 12, pages 157–164 (in Russian). Memoirs of the Scientific Seminars of the Leningrad Section of the Steklov Math. Inst., 1969.

[52] S. Trybuła, *Sequential estimation in processses with independent increments*, Dissertationes Mathematicae, 60:1–46, 1968.

[53] S. Trybuła, *Sequential estimation for finite state Markov processes*, Appl. Math. (Warsaw), 17:227–248, 1982.

[54] S. Trybuła, *Some investigations in minimax estimation theory*, Dissertationes Mathematicae, 240:1–42, 1985.

[55] M. Wilczyński, *Minimax sequential estimation for the multinomial and gamma processes*, Appl. Math. (Warsaw), 18(4):577–595, 1985.

[56] W. Winkler, *Sequential estimation in processes with independent increments*, In: Mathematical Statistics, pages 325–331, Warsaw, 1980, Banach Center Publ., Vol. 6. PWN.

[57] W. Winkler and J. Franz, *Sequential estimation problems for the exponential class of processes with independent increments*, Scand. J. Statist., 6:129–139, 1979.

[58] W. Winkler, J. Franz, and I. Küchler, *Sequential statistical procedures for processes of the exponential class with independent increments*, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, 13(1):105–119, 1982.

[59] J. Wolfowitz, *The efficiency of sequential estimates and wald's equation for sequential processes*, Annals of Mathematical Statistics, 18(2):215–230, 1947.

[60] R.A. Zaidman, Yu.V. Linnik, and V.N. Sudakov, *On sequential estimation and markov stopping times for processes with independent increments*, USSR-Japan Symposium on Probability. Habarovsk. August 1969. Novosibirsk. Nauka., pages 127–143, 1969. In Russian.

[61] R. Zieliński (ed.), *Sequential methods in statistics*, volume 16. Banach Center Publications, PWN, 1985.

[62] R. Zieliński, *A class of stopping rules for fixed precision sequential estimates*, Zastosow. Mat., 17:277–281, 1982.

Ryszard Magiera
Instytut Matematyki i Informatyki,
Politechnika Wrocławska,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: Ryszard.Magiera@pwr.wroc.pl

Maciej Wilczyński
Instytut Matematyki i Informatyki,
Politechnika Wrocławska,
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: Maciej.Wilczynski@pwr.wroc.pl

The contributions of Stanisław Trybuła to sequential estimation for stochastic processes

Abstract. This article provides an overview of the theoretical contributions made by Stanisław Trybuła to the field of sequential estimation for stochastic processes. His two papers, published in Dissertationes Mathematicae (1968,1985), have had a substantial impact on the field's future development and influenced many statisticians. We give a short review of main results of those authors, who had been inspired by the two fundamental works of Stanisław Trybuła.

Keywords: sequential estimation; efficient sequential plan; stochastic process; minimax sequential plan; exponential family of processes.

(*wpłynęło 10 lipca 2010 r.*)