

ANDRZEJ MŁODAK (Kalisz)

Historia problemu Webera

Streszczenie. W pracy zajmujemy się zagadnieniem, które znane jest powszechnie jako konstrukcja mediany Webera. Chodzi mianowicie o znalezienie takiego punktu w przestrzeni \mathbb{R}^n , że suma jego odległości od m danych punktów w tejże przestrzeni jest najmniejsza. Prezentujemy historię badań w tej dziedzinie poczynając od najprostszej formy tego problemu, tj. minimalizacji sumy odległości od wierzchołków trójkąta, którym zajmowano się w XVII i XVIII wieku aż po współczesne wyniki w tym zakresie i jego dalsze uogólnienia. Wskazujemy także na możliwości jego zastosowań w statystyce i ekonometrii.
Słowa kluczowe: punkt Fermata–Torricellego, mediana Webera.

Wiele kluczowych kierunków zastosowań matematyki koncentruje się wokół zagadnień związanych z optymalizacją wartości rozmaitych funkcji rzeczywistych. Jednym z najważniejszych problemów tego rodzaju jest wyznaczenie punktu minimalizującego sumę jego odległości euklidesowych od pewnej liczby danych punktów. Formalnie rzecz ujmując, jeśli m i n są liczbami naturalnymi, to mając w przestrzeni \mathbb{R}^n parami różnych m punktów $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$, $j = 1, 2, \dots, m$, należy znaleźć taki punkt $A_0 = (a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0n})$ należący do \mathbb{R}^n , dla którego spełniona jest równość

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_{0i})^2 \right)^{1/2} = \min_{A \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_i)^2 \right)^{1/2},$$

gdzie $A = (a_1, \dots, a_n)$. Zagadnienie to nosi nazwę *problemu Webera*, a punkt A_0 nazywamy *medianą Webera*. Mediana Webera w statystyce stanowi wielowymiarowe uogólnienie klasycznego pojęcia mediany obserwacji, zaś w sensie geometrycznym należy do kategorii tzw. punktów osobliwych w przestrzeni \mathbb{R}^n . W prezentowanym artykule przedstawimy rys historyczny tego problemu oraz współczesne możliwości jego rozwiązania i zastosowań. Wyjaśnimy także genezę wskazanych wyżej określeń.

Na prostej rzeczywistej. W najbardziej trywialnym przypadku, gdy mamy do czynienia z punktami na prostej, tj. jeśli $n = 1$, optymalizacyjna

równość (1) przybiera postać

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m |x_j - a_0| = \min_{a \in \mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^m |x_j - a| \right).$$

Ponieważ funkcja $|x|$ jest różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zatem z równości (2) wynika, że

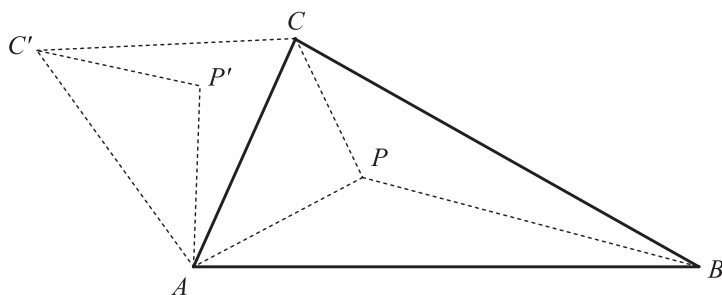
$$\sum_{j=1}^m \operatorname{sgn}(x_j - a_0) = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że punkt a_0 jest tak usytuowany, iż jest tyle samo liczb x_j mniejszych i większych od a_0 . Jeśli m jest liczbą nieparzystą, to $a_0 = x_{((m+1)/2)}$, tzn. jest to $(m+1)/2$ kolejna liczba w ciągu liczb x_j uszeregowanych monotonicznie. Gdy zaś m jest liczbą parzystą, to a_0 może być dowolną liczbą należącą do przedziału $(x_{(m/2)}, x_{((m/2)+1)})$. Jak się później okaże, mamy tu do czynienia z jedynym przypadkiem, w którym rozwiązanie zagadnienia (1) nie jest jednoznaczne.

Problem Fermata–Torricellego dla trójkąta i innych figur płaskich. Znacznie ciekawsze niż przypadek jednowymiarowy jest rozwiązanie zagadnienia (1) na płaszczyźnie (czyli, gdy $n = 2$). Najślawniejszą z historycznego punktu widzenia jego opcję stanowi zadanie polegające na wyznaczeniu punktu minimalizującego sumę odległości od trzech wierzchołków niezdegenerowanego trójkąta (gdy w (1) $m = 3$). Problem ten został sformułowany w XVII w. przez Pierre’a Fermata (1601–1665), francuskiego prawnika i poetę, znanego z wielu znakomitych osiągnięć matematycznych – przede wszystkim ze sławnego Wielkiego Twierdzenia jego nazwiska, które dopiero pod koniec lat 90. XX wieku udowodnił Andrew Wiles. Omawiana kwestia pojawiła się właściwie nieco przez przypadek, na końcu wydanego w 1637 r. sławnego dzieła o maksimach i minimach zatytułowanego „De maximis et minimis, et de inventione tangentium curvarum” (w którym Fermat zaprezentował reguły wyznaczania stycznych do różnych krzywych), przybierając postać następującego wyzwania rzuconego współczesnym: *„Jeśli ktoś nie pochwała moich metod, niech spróbuje rozwiązać następujący problem: mając dane na płaszczyźnie trzy punkty, znajdzie czwarty, taki, że suma jego odległości od trzech punktów danych osiąga minimum!”*. Za sprawą francuskiego franciszkanina Marina Mersenne’a (1588–1648), który oprócz uzdolnień matematycznych znany był z tego, że gromadził i szeroko upowszechniał informacje o zasłyszanych zagadnieniach i osiągnięciach naukowych, problem Fermata trafił do Włoch. Tam ok. roku 1640 pierwsze jego rozwiązanie podał słynny uczeń Galileusza i wynalazca termometru rtęciowego – Evangelista Torricelli (1598–1647). Wykazał on, że okręgi opisane na trójkątach równobocznych skonstruowanych zewnątrz na bokach danego trójkąta mają

jeden punkt wspólny, który jest rozwiązaniem zagadnienia Fermata. Od jego nazwiska punkt ten nazywany jest *punktem Torricellego*⁽²⁾. Rozwiązanie E. Torricellego opublikował jego wychowanek i współpracownik, inżynier i matematyk, Vincenzo Viviani (1622–1703) w swym dziele z 1659 r. pt. „De maximis et minimis, geometrica divinatio: in quintum Conicorum Apollonii Pergaei”. Inny uczeń Galileusza – Bonawentura Cavalieri (1598–1647) w wydanej w 1647 r. pracy „Exercitationes geometricae”, wykazał, że każdy z boków trójkąta jest widoczny z punktu Torricellego pod kątem 120° . Kolejny ważny rezultat w tej dziedzinie osiągnął angielski matematyk Thomas Simpson (1710–1761) – w opublikowanej w Londynie w 1750 r. rozprawie „Doctrine and Application of Fluxions” udowodnił on, że trzy proste łączące zewnętrzne (tzn. różne od wierzchołków danego trójkąta) wierzchołki opisanych przez Torricellego trójkątów równobocznych i odpowiednie przeciwległe wierzchołki rozważanego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, którym jest właśnie punkt Torricellego. Linie te znane są odtąd jako *proste Simpsona*. Problem minimalizacji sumy odległości od trzech punktów płaszczyzny znany jest również pod nazwą *problemu Steinera* na cześć szwajcarskiego uczonego Jacoba Steinera (1796–1863), profesora katedry matematyki uniwersytetu w Berlinie, który usystematyzował wiedzę z tego zakresu oraz badał pewne szczególne aspekty zagadnienia Fermata.

Poniżej prezentujemy klasyczne rozwiązanie problemu Fermata za punkt wyjścia przyjmując konstrukcję i własności prostych Simpsona.

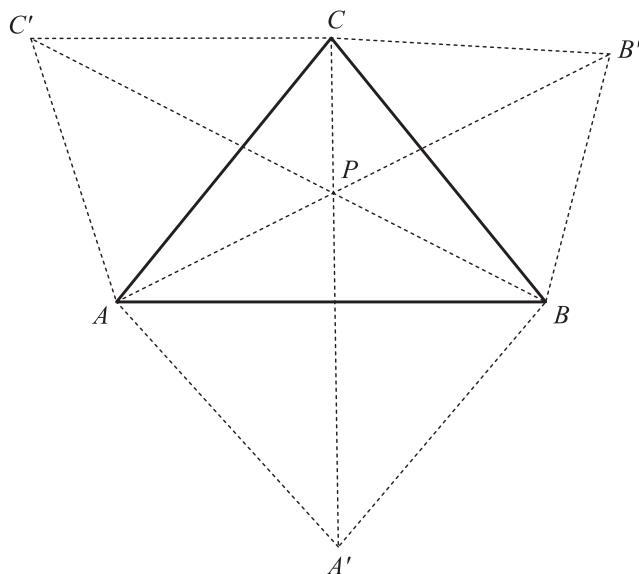


Rys. 1.

We wnętrzu trójkąta $\triangle ABC$ wybieramy dowolny punkt P i łączymy go z wierzchołkami A , B , C . Następnie obracamy trójkąt $\triangle APC$ o kąt 60° względem punktu A (p. rys. 1.). Niech C' i P' będą obrazami odpowiednio punktów C i P w tym przekształceniu. Trójkąt $\triangle C'AC$ jest równoboczny. Wówczas $|AP| = |AP'|$ oraz $\sphericalangle P'AP = 60^\circ$, czyli trójkąt $\triangle P'AP$ jest równoboczny, a więc $|PP'| = |AP|$. Ponadto jest $|P'C'| = |PC|$. Zatem

⁽²⁾ Choć w wielu opracowaniach nazywa się go także *punktem Fermata* lub *Fermata–Torricellego*.

$|PA| + |PB| + |PC| = |PP'| + |PB| + |P'C'|$. Ponieważ punkt C' jest obrazem punktu C powstałym w wyniku obrotu tego punktu o kąt 60° , zatem położenie punktu C' nie zależy od położenia punktu P . Stąd wnioskujemy, że $|PA| + |PB| + |PC| \geq |BC'|$, ponieważ łamana $BPP'C'$ nie jest krótsza niż odcinek $|BC'|$. Suma $|PA| + |PB| + |PC|$ osiąga więc minimalną wartość wówczas, gdy punkt P znajduje się na prostej $|BC'|$. Wtedy $\sphericalangle APC' = 60^\circ$. Ponadto, obracając trójkąt $\triangle APC$ wokół punktu C o kąt 60° i przeprowadzając analogiczne rozumowanie dochodzimy do wniosku, że $\sphericalangle C'PC = 60^\circ$, zatem $\sphericalangle APC = \sphericalangle APC' + \sphericalangle C'PC = 120^\circ$.



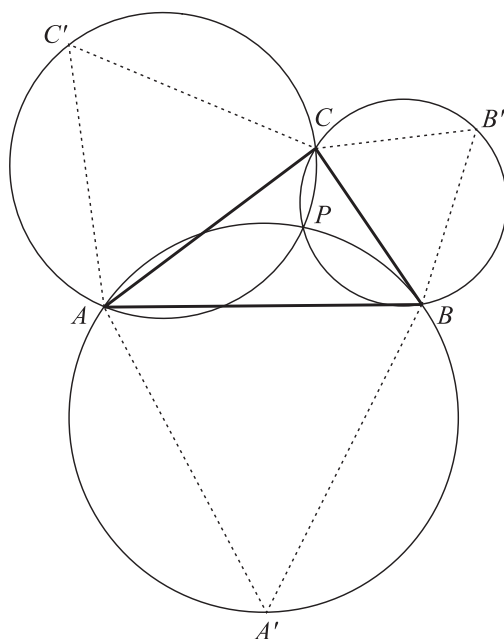
Rys. 2.

Konstruując analogiczne trójkąty równoboczne $\triangle BCB'$ oraz $\triangle ABA'$ (p. rys. 2) dochodzimy do wniosku, że punkt P leży na przecięciu prostych Simpsona BC' , AB' , CA' . Mamy więc $\sphericalangle APC = \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = 120^\circ$. Ta ostatnia równość zachodzi jednak tylko wówczas, gdy wszystkie kąty trójkąta $\triangle ABC$ są mniejsze niż 120° ⁽³⁾.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli $\triangle ABC$ posiada kąt rozwarty o mierze co najmniej 120° , to punktem Torricellego P jest wierzchołek tego kąta.

Jak wspomniano wcześniej, dla trójkąta z kątami mniejszymi od 120° punkt Torricellego można też zgrabnie skonstruować za pomocą okręgów

⁽³⁾ Jeśli trójkąty równoboczne zostaną zbudowane na bokach rzonego trójkąta nie po jego zewnętrznych stronach, a do wewnątrz, to odpowiednie proste Simpsona również przecinają się w jednym punkcie, zwanym *drugim punktem Fermata*.



Rys. 3.

opisanych na trójkątach równobocznych $\triangle ACC'$, $\triangle BCB'$, $\triangle BAA'$, jako ich punkt wspólny (p. rys. 3). Załóżmy bowiem, że P jest punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach $\triangle ACC'$ i $\triangle BAA'$ różnym od punktu A . Wówczas z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg wnioskujemy, że $\sphericalangle APC = 180^\circ - \sphericalangle AC'C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ oraz $\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle AA'B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Tym samym $\sphericalangle BPC = 120^\circ$, a zatem czworokąt $PBB'C$ jest wpisany w okrąg opisany na trójkącie $\triangle BB'C$, czyli punkt P należy również i do tego okręgu.

Pewne zagadnienia pokrewne związane z pojęciem punktu Torricellego oraz niektóre uogólnienia jego konstrukcji można znaleźć w książce H. Steinhausa ([18]) oraz opracowaniu A. Bogomolnego ([3]). H. Steinhaus odwołuje się przy tym do zastosowań rozpatrywanego problemu w fizyce, wykorzystując własności równoważących się sił.

Nadmiemy jeszcze, że jeżeli $ABCD$ jest czworokątem, to szukanym rozwiązaniem analizowanego zagadnienia jest wówczas punkt przecięcia jego przekątnych. Istotnie, mamy bowiem $|PA| + |PC| \geq |AC|$ oraz $|PB| + |PD| \geq |BD|$. Stąd $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq |AC| + |BD|$, zatem punkt przecięcia prostych AC i BD jest tym, w którym suma odległości od wierzchołków figury osiąga wartość najniższą.

Warto zauważyć, że jeśli środek ciężkości trójkąta pokrywa się z jego punktem Torricellego, to trójkąt ten jest równoboczny oraz, że jeżeli środek

ciężkości czworokąta pokrywa się z jego punktem Torricellego, to czworokąt ten jest równoległobokiem. Fakty te można wykorzystać w szkolnym nauczaniu geometrii (zob. A. Młodak ([15])).

Przypadek wielowymiarowy. Znacznie trudniejsze jest wyznaczenie punktu minimalizującego sumę odległości od punktów danych w najbardziej ogólnym przypadku analizowanego zagadnienia, czyli rozwiązanie równania optymalizacyjnego (1) dla dowolnych liczb naturalnych m, n , gdzie $m \geq 3$ oraz $n \geq 2$. Dlatego też było ono rozpatrywane stosunkowo późno, bo dopiero w XX stuleciu.

Jako pierwszy taką postać problemu Fermata sformułował wybitny niemiecki socjolog, teoretyk kultury i ekonomista, profesor Uniwersytetu w Heidelbergu, Alfred Weber (1868–1958). W opublikowanej w 1909 r. monografii „*Industriellen Standortlehre*” zawierającej wykład teorii lokalizacji przedsiębiorstw, jako rozwiązanie problemu minimalizacji kosztów transportowych, zaproponował on punkt będący rozwiązaniem zagadnienia (1). Jednakże ani sam A. Weber ani żaden z jego kolegów-naukowców nie potrafili podać konkretnych wyników na temat tego rozwiązania. Tym niemniej punkt ten od tamtego czasu nosi po dziś dzień nazwę właśnie mediany Webera⁽⁴⁾. Pierwszy przybliżony algorytm obliczeniowy wyszedł w 1937 roku spod pióra amerykańskiego matematyka węgierskiego pochodzenia Endre Weiszfelda (1916–2003), współzałożyciela słynnego Institute of Management Science w USA⁽⁵⁾. Procedura ta, opisana w pracy [20], polegała na określeniu zbioru wag odwrotnie proporcjonalnych do odległości danego punktu od punktów danych, a następnie skonstruowaniu nowego oszacowania jako ważonej średniej współrzędnych danych punktów z tym wagami. Mówiąc bardziej formalnie, iterację E. Weiszfelda rozpoczynamy od dowolnego punktu $A_{\langle 0 \rangle} = (a_{\langle 0 \rangle 1}, a_{\langle 0 \rangle 2}, \dots, a_{\langle 0 \rangle n}) \in \mathbb{R}^n$, a k -te przybliżenie szukanej mediany Webera punktem $A_{\langle k \rangle} = (a_{\langle k \rangle 1}, a_{\langle k \rangle 2}, \dots, a_{\langle k \rangle n}) \in \mathbb{R}^n$ wyznaczamy jako

$$a_{\langle k \rangle i} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_{\langle k-1 \rangle i})^2}} \right) / \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_{\langle k-1 \rangle i})^2}} \right),$$

$k = 1, 2, \dots$. Procedura kończy się, gdy odległości pomiędzy punktami kolejnych iteracji są dostatecznie małe.

Bliższe spojrzenie na problem oraz kilka interesujących faktów z tego zakresu stanowi dopiero treść artykułu J. B. S. Haldane z 1948 r. ([7]).

⁽⁴⁾ Inne nazwy spotykane w literaturze to m.in. *mediana geometryczna*, *mediana L_1* lub *medianocentrum*.

⁽⁵⁾ Naukowiec ten jest bardziej znany jako Andrew Vazsonyi. Stało się tak na skutek zmiany nazwiska, której dokonał on w 1938 r. z obawy przed prześladowaniami, jakie wówczas spotykały na Węgrzech mieszkającą tam ludność o żydowskich korzeniach.

Wprawdzie autor powyższej publikacji rozpatrywał nieco uproszczoną wersję zagadnienia (1), mianowicie punkty na płaszczyźnie ($n = 2$), ale przedstawione fakty można uogólnić dla dowolnej przestrzeni n -wymiarowej, co poniżej czynimy.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $m \geq 3$ oraz $n \geq 2$, to mediana Webera jest wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód. Załóżmy, że co najmniej trzy spośród punktów X_1, X_2, \dots, X_m są niewspółliniowe. Ponieważ izometria, jak np. przesunięcie równoległe, zachowuje wzajemne położenie punktów X_j , zatem możemy przyjąć bez zmniejszania ogólności, że punkt minimalizujący odległość od punktów $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$, $j = 1, 2, \dots, m$ znajduje się w początku układu współrzędnych (gdyż dokonując izometrycznych przekształceń układu punktów X_1, X_2, \dots, X_m , np. translacji czy rotacji, możemy taką pozycję uzyskać – mediana Webera jest bowiem afinicznie niezmiennicza). Załóżmy, że żaden z punktów X_1, X_2, \dots, X_m nie pokrywa się z rzeczonym początkiem układu współrzędnych. Niech

$$(3) \quad f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

będzie sumą euklidesowych odległości punktu $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ od punktów X_1, X_2, \dots, X_m . Wówczas dla dowolnego punktu $(z, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^m \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

a pierwsza pochodna tej funkcji

$$(4) \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \sum_{j=1}^m (z - x_{1j}) \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Wobec założenia, pochodna ta musi osiągać wartość 0 dla $z = 0$. Ponadto druga pochodna funkcji $\varphi(z)$ dana jest wzorem:

$$(5) \quad \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right) \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right).$$

Tym samym druga pochodna funkcji $\varphi(z)$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie (wyrażenie w potęgze ułamkowej jest sześcianem odległości, czyli liczbą dodatnią), a zatem innego ekstremum oprócz początku układu nie ma.

Jeżeli zaś rozpatrywanym punktem jest jeden z punktów X_1, X_2, \dots, X_m , np. X_1 , to

$$\varphi(z) = |z| + \sum_{j=2}^m \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

i pochodne są postaci:

a) lewostronna:

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = -1 + \sum_{j=2}^m (z - x_{1j}) \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right),$$

b) prawostronna:

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = 1 + \sum_{j=2}^m (z - x_{1j}) \left(\left((x_{1j} - z)^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Drugie pochodne funkcji $\varphi(z)$ na obu półosiach przyjmują również wartości dodatnie, natomiast pierwsza pochodna lewostronna tejże funkcji osiąga w punkcie $z = 0$ wartość -1 , zaś prawostronna 1 . Wobec tego funkcja $\varphi(z)$ posiada tylko to jedno, ostre minimum. Tym samym dowód twierdzenia został zakończony. \square

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli w przestrzeni \mathbb{R}^n ustalono pewien kierunek, P jest medianą Webera dla układu punktów X_1, X_2, \dots, X_m różną od każdego z nich, zaś α_j jest kątem, jaki tworzy wektor $\overrightarrow{PX_j}$ z tym ustalonym kierunkiem, $j = 1, 2, \dots, m$, to*

$$\sum_{j=1}^m \cos \alpha_j = 0.$$

Dowód. Wykorzystamy podejście zastosowane w dowodzie twierdzenia 1. Jeśli P spełnia założenia twierdzenia 2. oraz układ punktów X_1, X_2, \dots, X_m został przesunięty równolegle lub obrócony w taki sposób, że P znajduje się w środku układu współrzędnych, to pierwsza pochodna funkcji celu (3) dla $(z, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (a więc postaci (4)) musi się zerować przy $z = 0$. Niech ρ_j będzie długością wektora $\overrightarrow{PX_j}$, zaś θ_j – kątem pomiędzy tym wektorem a osią odpowiadającą pierwszej współrzędnej punktu w rozpatrywanej przestrzeni. Wobec tego $x_{1j} = \rho_j \cos \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Zatem z (4) wnioskujemy, że

$$(6) \quad 0 = \sum_{j=1}^m x_{1j} \left(\left(x_{1j}^2 + \sum_{i=2}^n x_{ij}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\rho_j \cos \theta_j}{\rho_j} = \sum_{j=1}^m \cos \theta_j.$$

Ponieważ ani numer wybranej współrzędnej, ani położenie osi nie zmniejszają ogólności rozważań, zatem twierdzenie zostało udowodnione. \square

W przypadku układu punktów na płaszczyźnie można udowodnić więcej, a mianowicie, że również (zachowując założenia i oznaczenia z twierdzenia 2.)

$$\sum_{j=1}^m \sin \alpha_j = 0.$$

W tym celu w dowodzie twierdzenia 2. kładziemy $n = 2$, a rozumowanie przeprowadzamy ze względu na rzędne, tzn. rozważamy sumę odległości punktu $(0, z) \in \mathbb{R}^n$ od punktów X_1, X_2, \dots, X_m . Wówczas wobec faktu⁽⁶⁾, że $x_{2j} = \rho_j \sin \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ otrzymujemy

$$0 = \sum_{j=1}^m x_{2j} ((x_{1j}^2 + x_{2j}^2)^{-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=1}^m \frac{\rho_j \sin \theta_j}{\rho_j} = \sum_{j=1}^m \sin \theta_j.$$

Z twierdzenia 2. wynika bardzo ciekawy wniosek. Otóż, jeżeli zmienimy układ punktów X_1, X_2, \dots, X_m w ten sposób, iż pewien punkt X_j zastąpimy X'_j , leżącym na półprostej PX_j i różnym od P to położenie punktu P nie ulegnie zmianie. Niech bowiem ρ'_j oznacza długość odcinka $\overline{PX'_j}$. Wówczas kąt pomiędzy wektorem $\overrightarrow{PX'_j}$ oraz osią odpowiadającą pierwszej współrzędnej w \mathbb{R}^n pozostanie bez zmian, a zatem wartość pochodnej funkcji celu (por. (6)) dla układu punktów $X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, X'_j, X_{j+1}, \dots, X_m$ w początku układu wyniesie również 0, co przy dodatniości drugiej pochodnej (por. (5)) daje nam wniosek, że P jest również medianą Webera i dla tego zmodyfikowanego układu punktów. Tak więc, np. obierając w trójkącie $\triangle ABC$ (rys. 2.) punkt A' należący do odcinka \overline{AP} i różny od P , stwierdzamy na mocy powyższego rozumowania, że punktem Torricellego trójkąta $\triangle A'BC$ jest również ów punkt P . W ostatniej części artykułu wykazemy, że własność ta, podobnie jak jednoznaczność mediany Webera, przenosi się na dowolną przestrzeń metryczną.

Oprócz badania własności mediany Webera z powodu jej licznych zastosowań w statystyce (np. badanie zróżnicowania obiektów na danym obszarze i w ustalonej dziedzinie) oraz ekonomii konieczne stało się podanie metod jej wyznaczania. Zadanie to okazało się bardzo trudne, o czym świadczy fakt, że znane są jak dotąd jedynie dwa algorytmy numeryczne wyznaczania owego punktu. Pierwszy podany przez J. C. Gowera w 1974 r. ([6]) opierał się na skomplikowanych meandrach fizycznej interpretacji mediany Webera. Jednak pięć lat później F. K. Bedall i H. Zimmermann ([2]) zaproponowali zgrabną metodę obliczeniową, której istotę stanowi umiejętne stosowanie rachunku różniczkowego. Wykorzystuje się w niej mianowicie funkcję celu (3)

⁽⁶⁾ Posługujemy się tutaj *de facto* współrzędnymi biegunowymi punktu na płaszczyźnie.

oraz wektor jej pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu (tzw. *gradient funkcji*):

$$\begin{aligned} \nabla f(A) &= \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_n} \right), \quad \text{gdzie} \\ (7) \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} &= \sum_{j=1}^m (x_{ij} - a_i) \left(\sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

a także macierz pochodnych rzędu drugiego (hesjan):

$$(8) \quad \mathbb{H}f(A) = \mathbb{Q}f(A) - \mathbb{I} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{(\sum_{p=1}^n (x_{pj} - a_p)^2)^{1/2}} \right),$$

gdzie \mathbb{I} jest macierzą identycznościową rozmiaru $n \times n$, zaś $\mathbb{Q}f$ to macierz tego samego rozmiaru, której elementy są postaci

$$\mathbb{Q}_{hi}f(A) = \sum_{j=1}^m \frac{(x_{hj} - a_h)(x_{ij} - a_i)}{(\sum_{p=1}^n (x_{pj} - a_p)^2)^{3/2}}, \quad h, i = 1, 2, \dots, n.$$

Wówczas przyrost współrzędnych mediany Webera $\Delta(A) = (\delta(a_1), \delta(a_2), \dots, \delta(a_n))$ jest rozwiązaniem następującego układu równań liniowych:

$$(9) \quad \mathbb{H}f(A) \cdot \Delta(A) = \nabla f(A).$$

Postępowanie iteracyjne⁽⁷⁾ jest następujące. Wybieramy dowolny punkt startowy $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ przestrzeni \mathbb{R}^n , obliczamy pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji celu w punkcie A według wzorów (7) i (8). Jeśli wartości współrzędnych gradientu nie przekraczają przyjętego poziomu dokładności szacunku $\varepsilon > 0$, to przyjmujemy wyjściowy wektor za rozwiązanie. W przeciwnym razie rozwiązujemy układ (9) i do odpowiednich współrzędnych punktu wyjściowego dodajemy odpowiednie wartości przyrostów, podstawiając $A := A + \Delta(A)$. Uzyskujemy w ten sposób nowy punkt, dla którego wyznaczamy wartości gradientu oraz drugich pochodnych cząstkowych i sprawdzamy, czy wartości współrzędnych gradientu nie przekraczają przyjętego poziomu precyzji. Procedurę tę powtarzamy tak długo, aż osiągniemy zakładaną dokładność gradientu funkcji celu dla oszacowania mediany Webera.

Jak zauważyliśmy w części drugiej, immanentną cechą punktu Torricellego w trójkącie jest równość kątów, jakie tworzą odcinki łączące go z wierzchołkami trójkąta, jeśli tylko wszystkie kąty tegoż trójkąta są mniejsze od 120° . Powstaje zatem naturalne pytanie, czy owa własność równokątności da się uogólnić. Problem ten badali m.in. Y. S. Kupitz i H. Martini ([8]). Uodrodnili oni, iż jeśli w \mathbb{R}^3 punkt Torricellego dla danych czterech punktów

⁽⁷⁾ Postępowanie to wykorzystuje pewien ogólniejszy model iteracji zwany *metodą Newtona–Raphsona*.

znajduje się wewnątrz utworzonego przez nie czworościanu, którego ściany mają wszystkie kąty płaskie mniejsze od 120° , to kąty przestrzenne wyznaczone przez odcinki łączące te punkty z wierzchołkami owego czworościanu są równe. Ponadto wykazali, iż punkt Fermata–Torricellego pokrywa się ze środkiem sfery opisanej na danym czworościanie lub z jego środkiem ciężkości jedynie wówczas, gdy czworościan ten jest foremny.

Najbardziej ogólnie do tego zagadnienia podeszła jednak L. Dalla ([4]), rozważając n -wymiarowy sympleks w \mathbb{R}^n , rozpięty na afinicznie niezależnych punktach X_1, X_2, \dots, X_{n+1} . Dla danego wypukłego $(n-1)$ -wymiarowego zbioru K oraz $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \notin \text{aff}(K)$, autorka cytowanej pracy definiuje stożek generowany przez K o wierzchołku α jako

$$\text{st}_\alpha K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta \in K} \{\alpha + \lambda(\beta - \alpha) : \lambda \geq 0\},$$

zaś *kątem przestrzennym* tego stożka $s(K, \alpha)$ nazywa stosunek $(n-1)$ -wymiarowej miary zbioru $U \cap \text{st}_\alpha K$ do $(n-1)$ -wymiarowej miary U , gdzie U oznacza powierzchnię kuli o środku α , tzn.

$$s(K, \alpha) = c(n) \int_{\text{st}_\alpha K} e^{-\|x\|^2} dx,$$

gdzie $\|\cdot\|$ to norma euklidesowa, zaś $c(n)$ oznacza stałą zależną tylko od n .

L. Dalla ([4]) udowodniła następujące twierdzenie i ciekawy wniosek płynący z jego dowodu.

TWIERDZENIE 3. *Niech $S = \text{conv}\{X_1, X_2, \dots, X_{n+1}\}$ będzie n -wymiarowym sympleksem w \mathbb{R}^n , zaś $A_0 \in \text{int}(S)$ będzie punktem Torricellego tego sympleksu. Jeśli $K_i = \text{conv}\{X_j : j \neq i\}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ są $(n-1)$ -wymiarowymi ścianami tego sympleksu, to:*

- a) dla $n = 2, 3$ kąty $s(K_i, A_0)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ są równe,
- b) dla $n \geq 4$ kąty $s(K_i, A_0)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ nie muszą być równe.

WNIOSEK 1. *Niech $A_0 \in \text{int}(S)$, zaś $B(A_0, r)$ będzie sferą opisaną na sympleksie S o środku A_0 . Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne:*

- (i) A_0 jest punktem Torricellego sympleksu S ,
- (ii) $\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \|X_i - X_j\|^2 = 2(n+1)^2 r^2$,
- (iii) $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n+1} \|X_i - X_j\|^2 = 2(n^2 - 1)r^2$ dla każdego $p = 1, 2, \dots, n+1$.

A zatem własność równokątności spojrzenia z punktu Torricellego (mediany Webera) na ściany określonej figury płaskiej czy przestrzennej nie da się uogólnić na dowolny wymiar. Natomiast teza wniosku umożliwia dość łatwe wyznaczenie owego szczególnego punktu. Bez trudu bowiem obliczymy r , a następnie, rozwiązując stosowny układ równań, współrzędne mediany Webera. Jednak te rozważania mają zastosowanie tylko w sytuacji, gdy

$m = n + 1$. W najbardziej ogólnym przypadku trzeba posłużyć się obliczeniami aproksymacyjnymi.

Warto zauważyć, że z wniosku 1. wynika ciekawa relacja pomiędzy promieniami sfery $n - 1$ -wymiarowej opisanej na sympleksie S o środku w jego punkcie Torricellego a promieniami sfer $(n - 2)$ -wymiarowych opisanych na $(n - 1)$ -wymiarowych sympleksach będących ścianami sympleksu S , o środkach w ich punktach Torricellego. Niech r' będzie promieniem takiej $(n - 2)$ -wymiarowej sfery opisanej na ścianie sympleksu S . Mamy wtedy z (ii) i (iii):

$$r = r' \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - 1}}.$$

A zatem promienie odpowiednich sfer wymiaru niższego są równe. Postępując indukcyjnie wstecz aż do wymiaru 2, otrzymujemy

$$r = r_{[2]} \prod_{p=2}^n \sqrt{\frac{p^2}{p^2 - 1}},$$

gdzie $r_{[2]}$ oznacza stosowny promień okręgu opisanego na trójkącie w \mathbb{R}^2 . Rozważmy kompleks składający się z wyjściowego sympleksu S traktowanego jako sympleks główny i wszystkich k -wymiarowych ścian tegoż sympleksu, $1 \leq k \leq n - 1$. Wobec powyższych wniosków, gdyby dla każdego ze „ścianowych” sympleksów w każdym z wymiarów 2, 3, ..., $n - 1$, istniały opisane na nich sfery odpowiednich wymiarów o środkach w stosownych punktach Torricellego, to doszlibyśmy do wniosku, że sympleksy najniższego możliwego poziomu, czyli trójkąty, muszą być przystające⁽⁸⁾. A to oznacza, iż takie sfery dla wszystkich wymiarów i wszystkich ścian istnieją tylko w przypadku sympleksów o ścianach przystających.

Z drugiej strony, zachodzi też następujący lemat.

LEMAT 1. *Niech S będzie sympleksem rozpiętym na $n + 1$ -elementowym podzbiorze zbioru $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$. Jeśli wszystkie kątowe parametry współrzędnych sferycznych punktów takiego podzbioru w odniesieniu do sfery $(n - 2)$ -wymiarowej opisanej na $(n - 1)$ -wymiarowej ścianie sympleksu S rozpiętego na punktach owego podzbioru i o środku w jego punkcie Torricellego są równe, to punkt Torricellego sympleksu utworzonego przez punkty Torricellego ścian pokrywa się z punktem Torricellego A_0 sympleksu S (o ile istnieje sfera opisana na tym sympleksie o środku w punkcie Torricellego sympleksu S).*

⁽⁸⁾ Nietrudno przy tym zauważyć, że trójkąty te w istocie są trójkątami równobocznymi (albowiem środek okręgu opisanego pokrywa się z punktem Torricellego i kąty środkowe oparte na bokach trójkąta mają po 120°).

Wówczas medianę Webera określamy jako punkt $A_0 \in \mathbb{R}^n$, taki, że dla każdego punktu $A \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\sum_{j=1}^m d(A_0, X_j) \leq \sum_{j=1}^m d(A, X_j).$$

Wówczas, podobnie jak w przypadku klasycznym, punkt A_0 ma następującą własność.

TWIERDZENIE 4. *Punkt A_0 jest również medianą Webera układu punktów X'_1, X'_2, \dots, X'_m , takiego, że dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ punkt X'_j należy do półprostej $A_0 X'_j$.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że punkt A_0 jest także medianą Webera dla układu punktów X'_1, X'_2, \dots, X'_m , w którym punkt X'_j należy do odcinka $\overline{A_0 X'_j}$. Istotnie, gdyby istniał punkt A taki, że

$$\sum_{j=1}^m d(A, X'_j) < \sum_{j=1}^m d(A_0, X'_j),$$

to dodając do obu stron tej nierówności

$$\sum_{j=1}^m d(X'_j, X_j)$$

i stosując nierówność trójkąta oraz związane z nią przyjęte założenie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m d(A, X_j) &\leq \sum_{j=1}^m (d(A, X'_j) + d(X'_j, X_j)) \\ &< \sum_{j=1}^m (d(A_0, X'_j) + d(X'_j, X_j)) = \sum_{j=1}^m d(A_0, X_j). \end{aligned}$$

To przeczy temu, że A_0 jest medianą Webera układu punktów X_1, X_2, \dots, X_m .

Przekształćmy obecnie układ punktów X_1, X_2, \dots, X_m przez jednokładność o środku w A_0 w taki układ punktów X'_1, X'_2, \dots, X'_m , by każdy punkt X_j leżał wewnątrz odcinka $\overline{A_0 X'_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Z wcześniejszego sprostowania wnioskujemy, że punkt A_0 jest także medianą Webera dla układu X'_1, X'_2, \dots, X'_m , co kończy dowód twierdzenia 4. \square

Także i w tym ogólnym przypadku zachodzi jednoznaczność mediany Webera (poza wyjątkiem współliniowości punktów X_1, X_2, \dots, X_m).

Przypuśćmy bowiem, że $A \neq A_0$ jest również medianą Webera dla układu punktów X_1, X_2, \dots, X_m . Wówczas istnieje takie $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, że punkt X_k nie leży na prostej AA_0 . Niech punkt X'_k będzie położony na

półprostej $A_0X_k^{\rightarrow}$ poza odcinkiem $\overline{A_0X_k}$. Wtedy punkty A, X_k, X'_k tworzą niezdegenerowany trójkąt, czyli ma miejsce nierówność

$$d(A, X'_k) < d(A, X_k) + d(X_k, X'_k).$$

Przyjmując $X'_j = X_j$ dla $j = 1, 2, \dots, m, j \neq k$, mamy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m d(A, X'_j) &< \sum_{j=1}^m d(A, X_j) + d(X_k, X'_k) = \sum_{j=1}^m d(A_0, X_j) + d(X_k, X'_k) \\ &= \sum_{j=1}^m d(A_0, X'_j). \end{aligned}$$

To oznacza, że punkt A_0 nie jest medianą Webera układu punktów X'_1, X'_2, \dots, X'_m , wbrew twierdzeniu 4. Zauważmy, że w obu dowodach nie korzystaliśmy z faktu, że X_1, X_2, \dots, X_m są różne i różne od A_0 .

Warto także nadmienić, że własność opisana w twierdzeniu 2. stanowi natomiast uzasadnienie wektorowej równości

$$\sum_{j=1}^m \frac{\overrightarrow{A_0X_j}}{|A_0X_j|} = \vec{0}.$$

Przyjrzymy się obecnie statystycznym generalizacjom i zastosowaniom koncepcji mediany Webera. Najbardziej ogólną probabilistyczną jej postać podali P. Milasevic i G. R. Ducharme ([12]). Jeśli przez $\|\cdot\|$ tradycyjnie oznaczymy normę euklidesową, a \mathcal{P} – miarę probabilistyczną na rozpatrywanej przestrzeni, to *medianą przestrzenną* określają oni wektor $\Theta \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$(10) \quad \int (\|X - \Theta\| - \|X\|) \mathcal{P}(dX) = \min_{Y \in \mathbb{R}^n} \int (\|X - Y\| - \|X\|) \mathcal{P}(dX).$$

Wykazali oni, że jeżeli miara \mathcal{P} nie wykazuje koncentracji na prostej, to mediana przestrzenna jest jednoznaczna. Równocześnie w innej pracy (G. R. Ducharme i P. Milasevic ([5])) autorzy ci badali asymptotyczne własności jej znormalizowanej wersji.

Korzystając z tej definicji można zauważyć także własność zachowywania normalnego asymptotyzmu tej mediany. R. Serfling ([17]) udowodnił bowiem twierdzenie, iż jeśli ciąg wielowymiarowych niezależnych wektorów losowych $\{X_j\}_{j=1,2,\dots}$ jest asymptotycznie normalny z wartością oczekiwaną μ , a g jest funkcją wektorową, taką, że każda jej składowa jest funkcją rzeczywistą oraz wszystkie różniczki w punkcie μ są niezerowe, to ciąg $\{g(X_j)\}_{j=1,2,\dots}$ jest asymptotycznie normalny z wartością oczekiwaną $g(\mu)$. Ponieważ mediana Webera według definicji (10) spełnia założenia tego twierdzenia, zatem mediany Webera rozpatrywanych zmiennych są asymptotycznie normalne,

a wartość oczekiwana ich rozkładu granicznego to mediana Webera z wartości oczekiwanej μ .

Ciekawy i czysto statystyczny wynik osiągnął S. Lardjane ([9]). Definiując przez $M = \{1, 2, \dots, m\}$ badaną populację jednostek statystycznych ($m > 1$), a \mathbf{x} – rozpatrywaną zmienną na M z wartościami w \mathbb{R}^n , rozważa się funkcję

$$\psi(u) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } u = 0, \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{jeśli } u \neq 0, \end{cases}$$

zwaną „wielowymiarową funkcją znaków”. Niech

$$\Psi_x(y) = \sum_{i \in N} \psi(y - x_i)$$

oraz

$$f_x(y) = \sum_{i \in N} \delta(x_i - y),$$

przy czym δ jest indykátorem zbioru $\{0\}$ (tzn. $\delta(x) = 1$, gdy $x = 0$ oraz $\delta(x) = 0$ w przeciwnym razie). Funkcja f_x jest w istocie dystrybuantą częstotliwości zmiennej \mathbf{x} . Autor cytowanej pracy wykazał, że punkt $\mu \in \mathbb{R}^n$ jest medianą Webera wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\Psi_x(\mu)\| \leq f_x(\mu)$.

Mediana Webera jest w statystyce dobrym narzędziem normalizacji cech. Niech zatem punkty $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$ reprezentują obiekty (np. jednostki przestrzenne) opisane za pomocą n cech statystycznych, zaś $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ będzie medianą Webera rozpatrywanego układu n cech. J. Lira i in. ([10]) proponują następującą ich normalizację:

$$z_{ij} := \frac{x_{ij} - \theta_j}{1,4826 \cdot \text{mãd}(C_j)}$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, gdzie $\text{mãd}(C_j)$ to medianowe odchylenie bezwzględne, w którym, zamiast odległości cech od mediany rozumianej standardowo, bada się ich odległości w stosunku do wektora Webera, tzn.

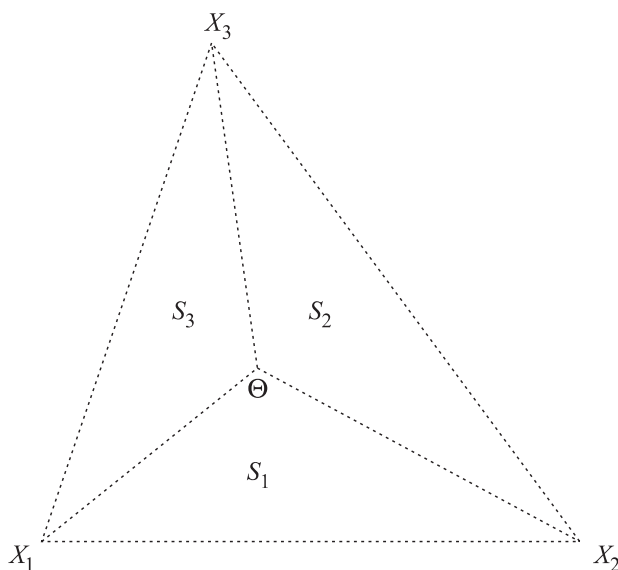
$$\text{mãd}(C_j) = \text{med}_{i=1,2,\dots,m} |x_{ij} - \theta_j|.$$

Rozkład zestandaryzowanych w ten sposób zmiennych jest zbliżony do rozkładu o zerowej wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym 1. Probabilistyczną przesłankę przemawiającą za stosowaniem stałej 1,4826 (równej w przybliżeniu $1/(\varphi^{-1}(3/4))$, gdzie φ to dystrybuanta rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1) stanowi fakt, że jeśli X_1, X_2, \dots, X_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną μ i wariancją σ^2 ($\sigma > 0$), to $E(1,4826 \cdot \text{mad}(X_1, X_2, \dots, X_k)) \approx \sigma$, dla dostatecznie dużych k , co zapewnia asymptotyczną zgodność tak skorygowanego medianowego odchylenia bezwzględnego z odchyleniem standardowym próby. Wykorzystując zapre-

zентовaną normalizację można konstruować taksonomiczne mierniki rozwojowe (zob. np. A. Młodak ([13], [14])).

D. L. Vandev ([19]) rozważał *uciętą medianę Webera*, tzn. taką, że dla pewnego ustalonego $1 \leq k \leq m$ funkcja celu (1) jest sumą nie wszystkich m , ale tylko k najmniejszych odległości euklidesowych. A. Zachos i G. Zouzoulas ([21]) badali także problem odwrotny w stosunku do zagadnienia Webera, polegający na wyznaczeniu punktów źródłowych mając dany punkt będący tą medianą oraz jego odległości od danych punktów i pewne ich wagi.

Pojawiło się też jeszcze inne uogólnienie pojęcia mediany Webera, tzw. *mediana Oja* (np. H. Oja ([16]), G. Aloupis ([1])). Zakładając, że $m \geq n$, dla dowolnego punktu $\Theta \in \mathbb{R}^n$ konstruuje się mianowicie sympleks rozpięty na punkcie Θ oraz dowolnych n spośród punktów X_1, X_2, \dots, X_m . Następnie sumuje się objętości wszystkich takich sympleksów. Wielkość ta nazywana bywa *głębokością Oja* punktu Θ . Punkt $\Theta \in \mathbb{R}^n$, dla którego owa suma okazuje się najmniejsza, jest właśnie medianą Oja. Na przykład dla trzech danych punktów (p. rys. 4) medianą Oja będzie taki punkt Θ , że suma pól trójkątów S_1, S_2, S_3 osiąga minimum.



Rys. 4.

W odróżnieniu od mediany Webera, mediana Oja nie zawsze jest wyznaczona jednoznacznie. Tak jest i w powyższym szczególnym przypadku.

Do innych ciekawych wyników powstałych wokół rozpatrywanego pojęcia należy zaliczyć także pracę H. Martiniego, K. J. Swanepoela i G. Weissa ([11]), którzy badali właściwości punktu Fermata–Torricellego w wielo-

wymiarowych rzeczywistych przestrzeniach unormowanych (zwanymi także przestrzeniami Minkowskiego).

Widzimy więc, że mediana Webera, to istotne bardzo efektywne narzędzie statystyczno-ekonometryczne o wszechstronnych zastosowaniach. Można przypuszczać, że badania nad własnościami i metodami wyznaczania zarówno jej samej, jak i jej matematycznych „krewniaków” w najbliższych latach będą rozwijać się jeszcze intensywniej.

Literatura

- [1] Aloupis G. (2001), *On Computing Geometric Estimators of Location*, (A thesis submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science), School of Computer Science, McGill University, Montreal, Canada (maszynopis), tekst dostępny w Internecie pod następującym adresem: http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/24808/http%3A%3Awww.cs.mcgill.ca%3A%3AathenszSzG_A_thesis.pdf/aloupis01computing.pdf.
- [2] Bedall F. K., Zimmerman H. (1979), *The mediancentre*, Applied Statistics, vol. 23, str. 325–328.
- [3] Bogomolny A. (2001), *The Fermat Point and Generalizations*, http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml.
- [4] Dalla L. (2001), *A note on the Fermat–Torricelli point of a d-simplex*, Journal of Geometry, vol. 70, str. 38–43.
- [5] Ducharme G. R., Milasevic P. (1987), *Spatial median and directional data*, Biometrika, vol. 74, str. 212–215.
- [6] Gower J. C. (1974), *The mediancentre*, Applied Statistics, vol. 23, str. 466–470.
- [7] Haldane J. B. S. (1948), *Note on the median of a multivariate distribution*, Biometrika, vol. 35, str. 414–415.
- [8] Kupitz Y. S., Martini H. (1994), *The Fermat – Torricelli point and the isosceles tetrahedra*, Journal of Geometry, vol. 49, str. 150–162.
- [9] Lardjane S. (2008), *Spatial median estimation in complex surveys*, Institute of Biomathematics and Biometry, Helmholtz Center Munich, German Research Center for Environmental Health, Neuherberg (preprint), <http://ibb.gsf.de/homepage/salim.lardjane/articles-web/spatmed-web.pdf>.
- [10] Lira J., Wagner W., Wysocki F. (2002), *Mediana w zagadnieniach porządkowania obiektów wielocechowych*, [w:] J. Paradysz (red.) Statystyka regionalna w służbie samorządu lokalnego i biznesu, Internetowa Oficyna Wydawnicza Centrum Statystyki Regionalnej, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań, str. 87–99.
- [11] Martini H., Swanepoel K. J., Weiss G. (2002), *The Fermat – Toricelli Problems in Normed Planes and Spaces*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 115, str. 283–314.
- [12] Milasevic P., Ducharme G. R. (1987), *Uniqueness of the Spatial Median*, The Annals of Statistics, vol. 15, nr 3, str. 1332–1333.
- [13] Młodak A. (2002), *Taksonomiczne mierniki przestrzennego zróżnicowania rynku pracy*. Wiadomości Statystyczne, R. XLVII, nr 4, str. 16–25.
- [14] Młodak A. (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Centrum Doradztwa i Informacji DIFIN, Warszawa.
- [15] Młodak A. (2007), *Punkt Torricellego*, Matematyka, R. LX, nr 8 (334), str. 456–458.

- [16] Oja H. (1983), *Descriptive statistics for multivariate distributions*, Statistical Probability Letters, vol 1., str. 327–332.
- [17] Serfling R. (1991), *Twierdzenia graniczne statystyki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [18] Steinhaus H. (1989), *Kalejdoskop matematyczny*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- [19] Vandev D. L. (2002), *Computing of Trimmed L_1 – Median*, Laboratory of Computer Stochastics, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences, www.fmi.unisofia.bg/fmi/statist/Personal/Vandev/papers/aspap.pdf.
- [20] Weiszfeld E. (1937), *Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donné et minimum*, Tahoku Mathematical Journal, vol. 34, str. 355–386.
- [21] Zachos A., Zouzoulas G. (2009), *The weighted Fermat–Torricelli problem for tetrahedral and an „inverse” problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 353, str. 114–120.

Andrzej Młodak
Urząd Statystyczny w Poznaniu
Oddział w Kaliszu
pl. J. Kilińskiego 13
62-800 KALISZ, Poland
E-mail: a.mlodak@stat.gov.pl

History of the Weber problem

Abstract. The paper is devoted to a problem, which is commonly known as a construction of the Weber median. A point in \mathbb{R}^n , such that the sum of its Euclidean distances from the m given points in this space achieves its minimum, has to be found. We present the history of research concerning this question, starting from the simplest form of it, i.e. the minimization of sum of distances from the vertices of triangle, which was investigated in the 17th and 18th centuries and finishing at the modern results in this matter and its further generalizations. We indicate also possibilities of its applications in statistics and econometrics.

Keywords: Fermat–Torricelli point, Weber median.

(wpłynęło 5 maja 2007 r.)